

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

Jean-Robert TIERCELIN

MODÈLES PROBABILISTES D'ÉTIAGES

Soutenue le 11 Mars 1970 devant la Commission d'examen :

MM. AVIAS

Président.

CORMARY

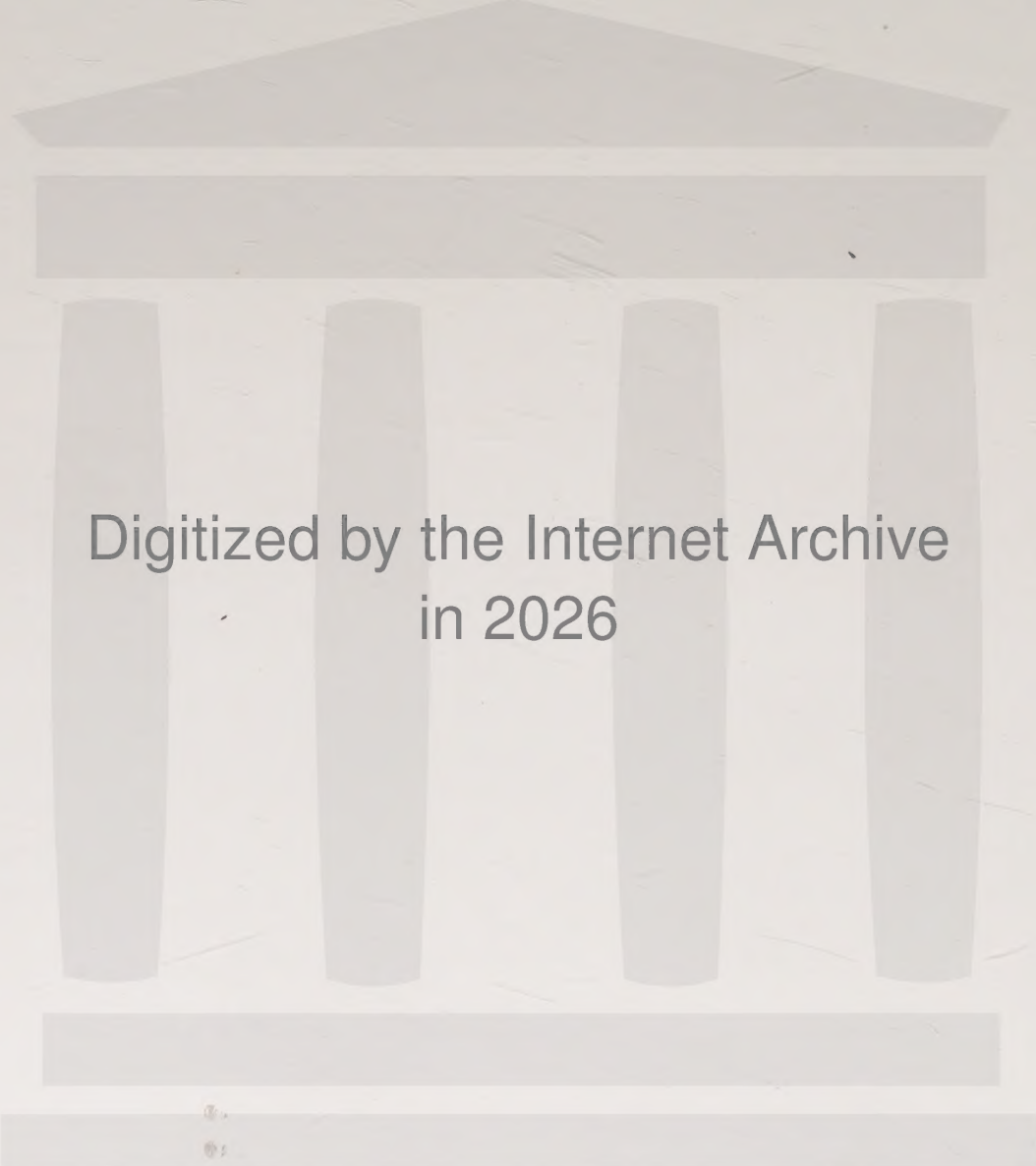
ESCOUFIER

HLAVEK

} *Assesseurs.*

CENTRE NATIONAL D'ÉTUDES TECHNIQUES ET DE RECHERCHES TECHNOLOGIQUES
POUR L'AGRICULTURE, LES FORÊTS ET L'ÉQUIPEMENT RURAL

Parc de Tourvoie - ANTONY (Hauts de Seine)



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548307_0011

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

Jean-Robert TIERCELIN

MODÈLES PROBABILISTES D'ÉTIAGES

Soutenue le 11 Mars 1970 devant la Commission d'examen :

MM. AVIAS

Président.

CORMARY

ESCOUFIER

HLAVEK

} *Assesseurs.*

CENTRE NATIONAL D'ÉTUDES TECHNIQUES ET DE RECHERCHES TECHNOLOGIQUES
POUR L'AGRICULTURE, LES FORÊTS ET L'ÉQUIPEMENT RURAL

Parc de Tourvoie - ANTONY (Hauts de Seine)

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR INGÉNIEUR

sur

Les Probabilités d'Étiages

MODÈLES PROBABILISTES D'ÉTAGES



10
11

Centre National de Recherche Scientifique et de Technologie
de l'Université de Montpellier
100 Avenue de la Faculté des Sciences
34293 Montpellier Cedex 5

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE MONTPELLIER

Doyen. P. DUMONTET

Assesseurs. Ch. SAUVAGE – M. MAURIN

Doyen honoraire P. MATHIAS

Professeurs honoraires

R. JACQUES

J. SOULAS

M. CASTERAS

G. DENIZOT

E. CARRIERE

J. GRANIER

E. TURRIERE

Ch. BOUHET

Professeurs titulaires

M. M. MOUSSERON Chimie Organique

M. J. FALGUEIRETTES Minéralogie

M. J.P. ROIG Physique

M. J. REGNIER Chimie

M. P. CHATELAIN Minéralogie et Cristallographie

Mme J. CHARLES Mathématiques

Mle O. TUZET Zoologie

M. P. CAILLON Physique

M. G. COUCHET Mécanique Supérieure

M. J. ROUZAUD Chimie

M. J. SALVINIEN Chimie-Physique

M. Ch. SAUVAGE Botanique

Mle A.M. VERGNOUX Physique

M. H. CHRISTOL Chimie (E.N.S.I.)

M. J. AVIAS Géologie

Mme G. VERNET Biologie Animale

M. P. VIELES Chimie

M. L. CECCHI Physique

M. J. RABINOVITCH Physique (C.S.U.P.)

M. H. ANDRILLAT Astronomie

M. E. KAHANE Chimie Biologique

M. M. SAVELLI Physique

M. J.J. MOREAU Mécanique rationnelle

M. M. MATTAUER Géologie

M. B. CHARLES Mathématiques Pures

M. L. EUZET Zoologie

M. J. MOTTE Biologie Végétale

M. C. DELOUPY Physique

M. R. JOUTY Physique

M. L. GRAMBAST Botanique

M. P. DUMONTET Physique

M. A. BONNET Botanique

M. R. LEGENDRE Zoologie

M. G. LAMATY Chimie

M. I. ASSENMACHER Physiologie Animale

M. R. MARTY Psychophysiologie

M. A. CASADEVALL Chimie Organique

Professeurs sans chaire

M. B. PISTOULET Physique

Mme M.L. DE POUQUES Botanique (C.S.U.P.)

M. Ch. ROUMIEU Analyse Supérieure

M. P. MURAOUR Géophysique appliquée

M. J. ROBIN Physique

M. A. POTIER Laboratoire des Acides Minéraux

M. G. TOURNE Chimie

M. R. LAFONT Physique

M. J. REMY Géologie

M. R. JACQUIER Chimie

M. P. DEMANGEON Géologie

Mme	S. ROBIN	Physique
Mme	Ch. DUBOUL-RAZAVET	Géologie (C.S.U.P.)
M.	E. GROUBERT	Physique
Mme	H. GUASTALLA	Biologie Physico- Chimique
M.	F. PROUST	Géologie
Mle	A. BAILLETTE	Mathématiques (C.S.U.P.)
M.	A. BASSOMPIERRE	Physique
M.	M. MAURIN	Chimie
M.	N. ROBY	Mathématiques
Mme	N. PARIS	Physiologie Végé- tale
M.	J. PARIS	Zoologie
M.	R. GAUFRES	Chimie
M.	J. SOULIER	Chimie (C.S.U.P.)
M.	G. BOUGNOT	Physique
M.	R. LENEL	Biologie Animale

Professeurs associés

M.	E. AKUTOWICZ	Mathématiques
M.	A. MICALI	Mathématiques
M.	C. VAGO	Biologie Animale
M.	K. KOHLER	Biochimie

Maîtres de Conférences

M.	P. MOLINO	Mathématiques
M.	Y. GUITTON	Physiologie Végé- tale (C.S.U.P.)
M.	G. BOMBRE	Physique (C.S.U.P.)
M.	C. PUISSEGUR	Biologie Animale (C.S.U.P.)
M.	P. VIALLET	Chimie (C.S.U.P.)
M.	J.M. MORETTI	Chimie
M.	L. THALER	Géologie
M.	J. LEGRAND	Physiologie Animale
M.	M. ROUZEYRE	Physique
M.	P. SABATIER	Mathématiques
M.	Ch. CASTAING	Mathématiques
M.	J.D. BAYLE	Physiologie Animale
Mme	M. HAKIM	Mathématiques

M.	R. HAKIM	Mathématiques
M.	M. BAUSSET	Mathématiques (C.S.U.P.)
M.	G. LOUPIAS	Mathématiques
M.	G. MASCHERPA	Chimie
M.	C. GOUT	Physique
M.	R. JONARD	Botanique
M.	F. LAPSCHER	Physique
M.	C. COMBES	Zoologie (C.S.U.P.)
M.	B. BRUN	Chimie Physique
M.	M. DENIZOT	Biologie Végétale
M.	L. KAISER	Physique (C.S.U.P.)
M.	L. GIRAL	Chimie

Maître de Conférences associé

M.	Y. CORMARY	Géologie
----	------------------	----------

Chargés d'enseignement

M.	M. LEFRANC	Mathématiques
M.	R. MARTY	Mathématiques

INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Maîtres de Conférences

M.	CANO	Physique
M.	FILLARD	Physique
M.	GARCIA	Métallurgie - Génie Mécanique
M.	J.P. TRILLES	Biologie
M.	G. BORDURE	Physique
M.	L. LASSABATERE	Electricité - Elec- tronique
M.	G. LECOY	Génie électrique

Chargé d'enseignement

M.	ESCOUFIER	Mathématiques
----	-----------------	---------------

Secrétaire Général

E. SIAU

AVANT – PROPOS

La présente étude concrétise le travail mené pour l'essentiel au cours d'une mission effectuée en 1968 et 1969 auprès du Groupe Hydrologie du Laboratoire National d'Hydraulique (Electricité de France), groupe implanté à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Nous tenons tout d'abord à remercier M. le Professeur AVIAS, qui nous a fait l'honneur de bien vouloir présider le Jury de thèse.

Nous adressons notre reconnaissance la plus vive à M. CORMARY, Maître de Conférence et animateur du Groupe Hydrologie, auprès duquel nous avons pu effectuer ce travail dans les meilleures conditions matérielles et morales.

Nos remerciements vont également à M. ESCOUFIER, Responsable de l'Informatique à l'Institut Universitaire de Technologie, qui a bien voulu apporter le concours de ses compétences pour la décision du Jury.

Nous remercions très vivement notre Chef de Service M. HLAVEK qui a eu l'initiative de notre longue mission à Montpellier, s'astreignant de ce fait à un surcroît de travail personnel important.

La consistance du travail et le délai dans lequel il a été exécuté ont largement bénéficié de la collaboration directe ou indirecte de plusieurs personnes du Groupe Hydrologie, et nous tenons à remercier tout particulièrement :

- M. DAUTY qui a établi l'essentiel de la programmation sur ordinateur, indispensable au caractère opérationnel de l'étude.
- M. LOBERT avec lequel nous avons eu de fructueuses discussions sur la philosophie et l'intérêt des modèles mathématiques.
- M. ROMEJON dont la participation aux calculs a largement abrégé les délais d'exécution.
- M. CAYET qui nous a fourni une grande partie des éléments concernant les problèmes de distribution d'échantillonnage.
- Mme CASTELNAU, Mme GUIRAUT et M. CASTELLANI, qui ont apporté leur concours à la programmation.

En dehors du Groupe Hydrologie, notre gratitude va à M. BERNIER pour nous avoir fourni les éléments mathématiques de base qui se trouvent à l'origine d'un de nos modèles.

REMARQUES PRELIMINAIRES

CONVENTIONS :

Les formules mathématiques sont repérées par des chiffres entre parenthèses, et les références bibliographiques par des chiffres entre crochets.

JUSTIFICATION DE LA PRESENTATION PROPOSEE :

Il nous a semblé quasiment impossible d'obtenir une rédaction unique qui soit à la fois complète et facile à lire. Dans ces conditions, nous proposons d'une part une "rédaction condensée" d'une dizaine de pages, visant à une compréhension rapide de l'étude, d'autre part une "rédaction principale" destinée à rendre compte de l'ensemble des travaux effectués. Les deux textes suivent le même plan, afin de faciliter les reports de l'un à l'autre.

Une partie de l'étude fait l'objet d'un fascicule annexe, en raison du fait qu'elle ne débouche actuellement sur aucune application pratique, mais nous semble cependant devoir être publiée.

Enfin, la bibliographie, qui intéresse les trois rédactions précédentes, fait l'objet elle aussi d'un fascicule à part.

En définitive, la présente brochure est formée des fascicules successifs suivants, séparés par des pages cartonnées pour en faciliter le repérage :

- Rédaction condensée.*
- Rédaction Principale.*
- Annexe.*
- Bibliographie.*

RÉDACTION CONDENSÉE

PLAN

Pages

1	– INTRODUCTION.....	1
11	– CONTEXTE SCIENTIFIQUE.....	1
12	– CONTEXTE PRAGMATIQUE.....	1
2	– MODELE AUTOREGRESSIF POUR LES DEBITS.....	2
21	– INTERET D'UN MODELE DE DESCRIPTION DES SEULS DEBITS.....	2
22	– PRINCIPE DU MODELE.....	3
23	– DEVELOPPEMENTS ANALYTIQUES DU MODELE.....	3
24	– SIMULATION.....	3
25	– VERIFICATION DE LA VALIDITE DU MODELE.....	4
26	– APPLICATIONS DU MODELE.....	4
27	– CONCLUSIONS SUR LE MODELE DE DEBITS.....	5
3	– MODELE PLUIES–DEBITS.....	5
31	– INTRODUCTION.....	5
32	– PRINCIPE DU MODELE PLUIES–DEBITS.....	5
33	– DETERMINATION DES ECOULEMENTS ELEMENTAIRES.....	6
34	– RELATIONS ENTRE PLUIES ET ECOULEMENTS ELEMENTAIRES.....	6
35	– COMPOSITION DES ECOULEMENTS ELEMENTAIRES DANS LA FORMATION DES DEBITS.....	7
36	– UTILISATION DU MODELE.....	7
37	– CONCLUSIONS SUR LE MODELE PLUIES–DEBITS.....	8
4	– CONCLUSION.....	8
41	– RESULTATS ACQUIS.....	8
42	– ASPECTS PROSPECTIFS.....	8

1 – INTRODUCTION

Le contexte dans lequel se situe l'étude dont nous allons rendre compte présente un double aspect. Du point de vue scientifique, il convient de donner quelques définitions et d'évoquer les publications existant dans le domaine étudié ou sur des sujets connexes. Ensuite, du point de vue pragmatique, il importe de faire ressortir les objectifs ayant conduit à entreprendre l'étude.

11 – CONTEXTE SCIENTIFIQUE

Nous évoquerons successivement la question des étiages, puis celle des modèles.

11.1 – LES ETIAGES

Parmi les définitions que l'on peut donner de l'étiage, nous avons choisi de considérer celui-ci comme le déficit des débits en un point donné par rapport à un besoin en eau donné, ce déficit pouvant être décrit plus précisément par sa durée, son volume, etc., suivant les besoins. Les étiages ont fait l'objet d'un certain nombre de recherches, relativement récentes pour la plupart, cette branche de l'hydrologie ayant longtemps été négligée du fait des difficultés de mesure des faibles débits et pour des raisons pratiques qui apparaîtront au § 12.

11.2 – LES MODELES

Un modèle est un ensemble de relations mathématiques ou physiques présentant une similitude de propriétés avec un système naturel ou technologique [7].

Dans le domaine de l'hydrologie, on peut soit chercher à représenter les phénomènes physiques constituant le cycle de l'eau au moyen d'un modèle défini par des relations déterministes, soit analyser le processus des débits, sans chercher à en déterminer les causes, de façon purement stochastique. En fait ces deux points de vue peuvent s'interpénétrer, ce qui conduit à des modèles mixtes. En ce qui nous concerne, nous avons étudié successivement un modèle purement probabiliste et un modèle mixte.

12 – CONTEXTE PRAGMATIQUE

L'intérêt des questions traitées repose à la fois sur l'importance croissante des étiages et sur les possibilités des modèles.

12.1 – DEVELOPPEMENT DU PROBLEME DES ETIAGES

Dans la plupart des aménagements hydrauliques d'une certaine importance réalisés jusqu'à présent, il y a mise en jeu de réserves permettant de régulariser les débits. Dans ce contexte les problèmes hydrologiques essentiels concernent les apports annuels et les crues exceptionnelles.

En fait, une évolution se dessine dans ce domaine, à cause de deux facteurs conjugués : d'une part "l'écrémage" progressif des sites de barrage les plus intéressants, laissant prévoir un coût relatif croissant pour les réalisations futures, d'autre part l'augmentation continue de la demande en eau. Dans ces conditions, il sera de plus en plus rentable de tirer parti de ressources au fil de l'eau, ce qui exige une connaissance aussi précise que possible des débits d'étiage.

12.2 – INTERET PRATIQUE DES MODELES

Il résulte de la définition même des modèles que ceux-ci peuvent être d'une application très générale dans la pratique, dans la mesure où les questions posées s'expriment en termes logiques ou quantitatifs, la réponse résultant de la résolution d'un système d'équations ou de contraintes logiques.

La conséquence immédiate est que différents résultats obtenus à partir d'un même modèle sont cohérents.

Dans le domaine de l'hydrologie, un des intérêts essentiels des modèles est qu'ils permettent de tirer parti d'une information réduite inutilisable par d'autres méthodes, la qualité des résultats donnés par ces modèles étant évidemment fonction de la qualité et de la quantité de l'information qui a servi à les bâtir.

Un autre aspect important des modèles provient de la possibilité de traiter des problèmes complexes qui seraient inaccessibles autrement, ce qui apparaîtra plus clairement lorsque nous exposerons des exemples d'application pratique.

2 – MODELE AUTOREGRESSIF POUR LES DEBITS

21 – INTERET D'UN MODELE DE DESCRIPTIONS DES SEULS DEBITS

L'idée la plus immédiate pour construire un modèle hydrologique consiste à ne s'intéresser qu'aux seuls débits, à l'exclusion des facteurs qui les conditionnent. Un tel modèle est nécessairement purement probabiliste. Son intérêt essentiel réside dans sa relative simplicité, permettant une construction rapide. Notre premier modèle, dont nous allons exposer les principes, est de ce type.

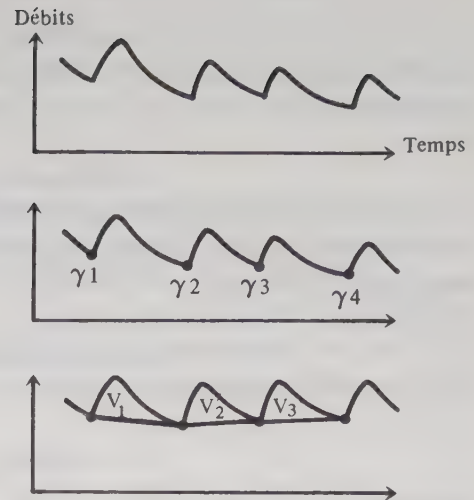
La mise au point a été effectuée avec les débits mesurés du 15 juin au 15 septembre sur un affluent de la Garonne. Le même modèle a ensuite été utilisé pour les débits d'un affluent de l'Allier.

22 – PRINCIPE DU MODELE

Considérons une suite de débits journaliers durant la période estivale et les débits minimums relatifs de cette suite, nous allons poser que la succession des débits journaliers est définie par la superposition du processus des points “ γ ” et du processus des volumes complémentaires “ V ”.

Les intervalles de temps séparant les points γ successifs sont mutuellement indépendants et suivent une loi de probabilité que l'on peut pratiquement assimiler à une loi exponentielle (processus de POISSON).

fig. A



Moyennant un changement d'ordonnée, nous remplaçons la succession des points γ par une succession de points “ g ” dont l'ordonnée suit un processus markovien, laplacien et stationnaire, c'est-à-dire que l'ordonnée de g suit une loi de probabilité normale et uniforme dans le temps, et que g_{i+1} est entièrement déterminé en probabilité à partir de g_i , indépendamment de g_{i-1} , g_{i-2} ,

Les lois marginale et conditionnelle de g permettent de remonter aux lois de γ qui, combinées avec la loi de V , permettent de remonter aux lois marginales et conditionnelles des débits.

23 – DEVELOPPEMENTS ANALYTIQUES DU MODELE

Le modèle a été d'abord établi à partir d'une série d'observations relativement longue (28 ans), ce qui a permis d'abord une mise au point précise par comparaison de débits moyens calculés à partir du modèle avec les données d'observation correspondantes.

La période de base de 28 ans d'observations a ensuite été scindée en sous-périodes de 4 ans et 7 ans, à partir de chacune desquelles nous avons réglé le modèle, ce qui a permis de se faire une idée de la variation d'échantillonnage des résultats obtenus à partir de courtes séries d'observations, et de comparer cette variation avec celle qui résulterait de l'emploi d'autres méthodes.

24 – SIMULATION

Le modèle, provenant de la combinaison de processus simples, se prête bien à la simulation. Cette simulation est indispensable d'une part pour juger complètement de la fidélité du modèle aux observations, d'autre part pour tirer parti de celui-ci sur le plan pratique, car le traitement analytique possible est très limité.

Le principe de la simulation consiste à reconstituer à l'aide de tirages au hasard ce que pourrait être une longue suite de débits obéissant aux conditions mathématiques définissant le modèle. Cette suite générée, aussi longue que l'exigent les besoins, est ensuite exploitée, “à la main” ou sur ordinateur pour répondre à n'importe quel problème concernant les débits.

25 – VERIFICATION DE LA VALIDITE DU MODELE

Considérons des périodes successives de 5 jours consécutifs : 16 juin - 20 juin. 21 juin - 25 juin, etc., couvrant la saison concernée, et intéressons-nous aux débits moyens relatifs à chacune de ces périodes.

Nous avons comparé les débits moyens de 5 jours donnés par le modèle à ceux provenant des observations de base. En effet, le modèle est trop grossier pour reproduire correctement les débits à une échelle de temps plus fine, ce qui de toute façon n'aurait pas d'intérêt pratique dans le cadre de l'étude des étiages.

La comparaison porte successivement sur la loi de probabilité des débits de 5 jours et sur le schéma de dépendance interne des débits moyens pour des périodes de 5 jours successives.

La comparaison a pu être faite analytiquement pour le premier point, et par simulation sur ordinateur pour le schéma de dépendance interne. Le modèle se révèle fidèle aux observations.

26 – APPLICATIONS DU MODELE

Nous avons choisi, à titre d'exemple, des problèmes d'application d'un intérêt pratique certain et d'une complexité suffisante pour être inaccessibles par d'autres moyens que l'utilisation de modèles dans le cas d'une information de base réduite (ce qui en pratique est généralement le cas).

Premier problème. Pour différents niveaux de besoins en eau, déterminer les lois de probabilité du volume des déficits de débits d'une station donnée pendant la période 15 juin - 15 septembre. Nous pouvons obtenir le graphique schématisé ci-contre, grâce à la simulation de données de débits exploitées par un programme spécial sur ordinateur.

Le diagramme ainsi élaboré constitue un exemple de synthèse des données hydrologiques nécessaires à un problème d'aménagement hydraulique au fil de l'eau.

Nous avons également traité un problème voisin du précédent, et présentant *a priori* le même intérêt. Le niveau des besoins étant fixé, que devient la loi de probabilité du volume des déficits après réalisation de réserves de différentes capacités ? Nous pouvons obtenir, en utilisant les débits déjà simulés, le graphique ci-contre, qui permet d'apprécier l'intérêt éventuel de la réalisation de réserves et le volume à retenir par celles-ci.

Notons enfin que le modèle peut aussi servir à la prévision des débits à venir lorsque l'on connaît les débits à un instant donné de la période concernée par le modèle.

Station : le SALAT à KERCABANAC

Fonction de répartition des volumes des déficits pour différents niveaux "H" des besoins.

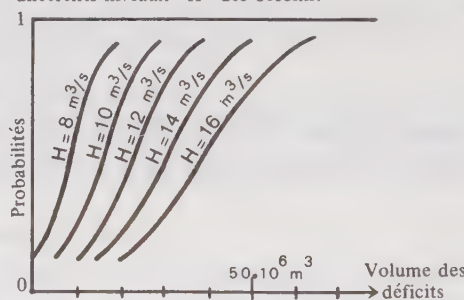
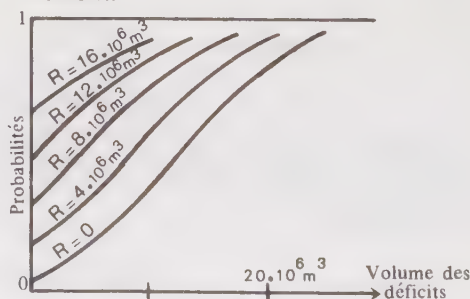


fig. B

Fonction de répartition des volumes des déficits pour un besoin de $10 \text{ m}^3/\text{s}$ avec différents volumes "R" de réserves.



Les exemples d'application précédents montrent le parti qu'on peut tirer d'un modèle probabiliste de débits. Ces exemples ne sont évidemment pas limitatifs, et on peut en imaginer de beaucoup plus complexes. Les modèles hydrologiques peuvent ainsi s'intégrer dans des modèles de recherche opérationnelle pour des aménagements hydrauliques.

Cependant, un modèle de pure description des débits présente des limites, et se révèle inutilisable dans deux cas très importants. Tout d'abord dans le cas de l'irrigation, les besoins dépendent des pluies, ainsi d'ailleurs que les ressources en eau, et un modèle de description des seuls débits ne permet pas de tenir compte de ces relations ni d'estimer correctement les risques de déficit. Ensuite, il arrive fréquemment que l'on dispose d'une information réduite sur les débits, et de longues séries d'observations sur les pluies dont il serait rentable de tenir compte pour améliorer la connaissance des débits. Dans cette circonstance un modèle qui n'intègre pas les pluies est évidemment pris en défaut.

3 – MODELE PLUIES-DEBITS

31 – INTRODUCTION

Le § 27 fait ressortir l'intérêt qui s'attache aux modèles pluies-débits.

Nous avons donc développé un modèle de ce type, en partant d'éléments mathématiques fournis par M. J. BERNIER, Ingénieur à l'E.R.N.U.T.H. (EdF).

Les stations hydrométriques utilisées et la période de l'année étudiée (15 juin - 15 septembre) sont les mêmes que dans le modèle autorégressif de débits.

32 – PRINCIPE DU MODELE PLUIES-DEBITS

Considérons des relevés pluviométriques et hydrométriques journaliers effectués à des emplacements peu éloignés durant une période commune. Les pluies sont d'abord regroupées en "épisodes pluvieux", suites de jours pluvieux consécutifs. Le modèle est composé de deux "sous-modèles" qui s'articulent comme il suit :

1er sous-modèle : passage d'une pluie réelle totale à un "écoulement élémentaire" dont cette pluie est présumée responsable.

2ème sous-modèle : composition des écoulements élémentaires pour former des débits.

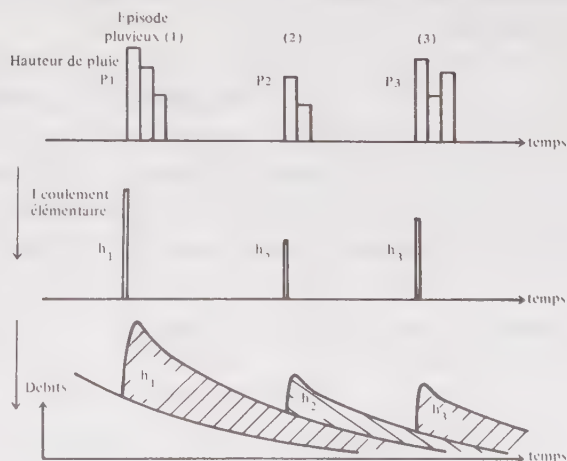


fig. C

En pratique la mise en oeuvre comporte d'abord la séparation des écoulements donnés par les relevés de débits en écoulements élémentaires h_1 , h_2 , h_3 , qui constituent la charnière entre les deux sous-modèles (§ 33). Il est alors possible de mettre en oeuvre ces deux opérations (§§ 34 et 35).

33 — DETERMINATION DES ECOULEMENTS ELEMENTAIRES

La confrontation entre la chronique des débits et celle des pluies permet de voir lesquelles de ces dernières ont été "efficaces", c'est-à-dire ont provoqué un accroissement des débits. En prolongeant de façon hypothétique les courbes de tarissement interrompues par ces accroissements de débits, il est possible de découper sur la chronique des débits des écoulements élémentaires dont on évalue l'importance respective.

34 — RELATIONS ENTRE PLUIES ET ECOULEMENTS ELEMENTAIRES

Après avoir effectué une tentative pour prendre en compte la plupart des données climatologiques sous forme d'évapotranspiration, il a fallu finalement se ramener aux seules pluies.

Néanmoins, nous avons tenu compte indirectement de l'évapotranspiration dans l'utilisation que nous avons faite de la chronique des pluies. Pour cela considérons la durée "e" de l'épisode sec précédant un épisode pluvieux donné pendant lequel est tombée une hauteur d'eau "p". Dans le système de coordonnées (e, p) reportons toutes les pluies de la période qui nous intéresse, en représentant par un signe différent les pluies qui n'ont pas provoqué d'écoulement détectable et celles qui en ont provoqué un. On s'aperçoit de ce que chacune des deux catégories de pluie se regroupe assez bien, et que le plan (e, p) peut être assez bien partagé entre un domaine des pluies efficaces et un domaine des pluies inefficaces, par une courbe dite de "pluie limite".

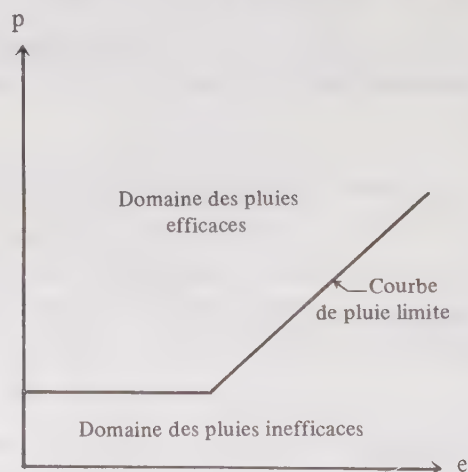


fig. D

La nécessité de l'opération, que nous venons d'effectuer, apparaît dans les circonstances suivantes. Supposons que nous disposions d'une période T_1 d'observations communes des débits et des pluies, et d'une période complémentaire T_2 d'observations pluviométriques dont on veut tirer parti. La première question qui se pose est de savoir quelles ont été vraisemblablement les pluies efficaces de la période T_2 . L'utilisation de la notion de pluie limite fournit une réponse à ce problème.

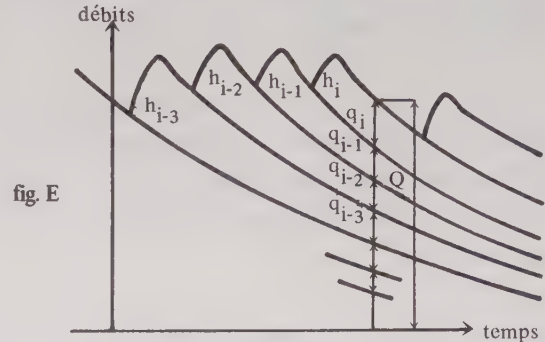
Après avoir réglé ce point particulier, il faut définir le passage d'une pluie réelle p à un écoulement élémentaire h, en comparant la suite des p et celle des h. Nous avons adopté un mode de passage statistique défini par une régression linéaire, provisoirement.

Nous allons maintenant définir très schématiquement le principe mathématique permettant le passage des écoulements élémentaires aux débits.

Choisissons d'abord une fonction de transfert définissant de façon "moyenne" comment un écoulement élémentaire h s'étale en une suite de débits.

Le débit Q à un instant donné t résulte de la superposition de débits élémentaires $q_i, q_{i-1}, q_{i-2}, \dots$ résultant des écoulements élémentaires antérieurs $h_i, h_{i-1}, h_{i-2}, \dots$ répartis par la fonction de transfert.

Appelons Q^* le logarithme de la transformée de LAPLACE de Q .



$Q = q_i + q_{i-1} + q_{i-2} + \dots$ entraîne $Q^* = q_i^* + q_{i-1}^* + q_{i-2}^* + \dots$. En partant de l'expression de $q_i^*, q_{i-1}^*, \dots$ on obtient celle de Q^* qui peut être développée pour donner les premiers moments de la loi de probabilité de Q .

Nous approchons ainsi de façon analytique la loi de probabilité des débits, et de façon analogue la loi de probabilité des débits moyens sur un intervalle de temps quelconque. Comme notre précédent modèle, celui-ci est également assez grossier et ne permet la description des débits qu'à une échelle de temps de 5 jours au moins, ce qui cependant est suffisant pour les problèmes d'étiages.

36 – UTILISATION DU MODELE

En complément du premier sous-modèle, il s'est avéré tout d'abord nécessaire de compliquer le passage pluies-débits par une transformation destinée à rendre compte de la non-stationnarité du processus d'écoulements élémentaires dans le temps (le rendement moyen des pluies diminue au cours de l'été).

Une première application du modèle consiste à obtenir des résultats concernant les débits, abstraction faite des pluies, en utilisant uniquement le deuxième sous-modèle.

Cette opération permet tout d'abord de contrôler l'adéquation de ce sous-modèle aux données réelles. La seule comparaison que nous ayons pu faire et qui a donné un résultat positif porte sur les moments des lois de probabilité des débits moyens. Pour effectuer les autres comparaisons indispensables, évoquées au § 24 nous ferons recours à la simulation.

Revenons maintenant au problème évoqué au § 34, consistant à tirer parti d'une longue série d'observations pluviométriques. En utilisant d'une part la relation de régression existant entre "p" et "h" sur la période commune T_1 , et d'autre part la moyenne et la variance de p calculées sur la période $T_1 + T_2$, nous pouvons obtenir des estimations améliorées de la moyenne et de la variance de h [35], donc finalement des estimations améliorées sur les débits.

Enfin, le modèle se prête à la simulation, dont l'utilité est la même que pour notre précédent modèle : vérification complète de l'adéquation du modèle aux observations, et résolution des problèmes d'application. Précisons que le programme de simulation sur ordinateur n'est pas achevé.

37 – CONCLUSIONS SUR LE MODELE PLUIES-DEBITS

Bien que ce modèle ne soit pas encore opérationnel à l'heure actuelle, il est déjà acquis que les moments des lois de probabilité des débits moyens sont respectés. D'autre part la méthodologie d'utilisation du modèle est au point.

La tâche la plus urgente concernant ce modèle consiste à mettre au point la simulation. Il sera ensuite possible de procéder à certaines améliorations, en ce qui concerne tout particulièrement les conditions régissant les débits de la date initiale de la mise en oeuvre du modèle, conditions qui présentent une forte variance d'échantillonnage et dont la détermination ne peut être améliorée par la prise en compte des pluies.

Lorsque ces améliorations auront été effectuées, il y aura lieu d'envisager l'application du modèle aux problèmes d'irrigation, en complétant le modèle hydrologique par un modèle liant les pluies et les besoins en eau du sol irrigué.

4 – CONCLUSION

Il convient maintenant de faire le point sur l'ensemble de l'étude et d'examiner les aspects prospectifs communs aux deux modèles considérés.

41 – RESULTATS ACQUIS

Le modèle autorégressif des débits est opérationnel, et son application peut être envisagée pour d'autres rivières que celles des bassins de la Garonne et de l'Allier...

Le modèle pluies-débits est en cours d'élaboration sur le plan du traitement automatique mais semble d'ores et déjà plus riche en possibilités que le précédent.

42 – ASPECTS PROSPECTIFS

Un problème d'une certaine importance concerne l'échantillonnage des résultats tirés des modèles. Nous avons pu l'approcher sur le plan analytique en ce qui concerne le modèle pluies-débits, mais seule la simulation peut apporter des résultats aussi complets que nécessaires pour les deux modèles.

Il conviendra également de se soucier du domaine géographique sur lequel le modèle est utilisable. *A priori* il n'y a pas de raisons pour que le modèle ne soit pas utilisable sur la majorité des cours d'eau en France métropolitaine.

Enfin, un problème essentiel consiste à savoir utiliser l'information fournie par les stations hydrométriques voisines de celles qui est étudiée, notamment pour améliorer l'estimation de certains paramètres du modèle. Ce type de problème fait l'objet d'un ensemble particulier de recherches, notamment au Groupe Hydrologie du Laboratoire National d'Hydraulique.

RÉDACTION PRINCIPALE

PLAN

	<i>Pages</i>
1 – INTRODUCTION.....	9
11 – CONTEXTE SCIENTIFIQUE.....	9
11.1 – LES ETIAGES.....	9
11.2 – LES MODELES.....	10
12 – CONTEXTE PRAGMATIQUE.....	12
12.1 – DEVELOPPEMENT DU PROBLEME DES ETIAGES.....	12
12.2 – INTERET DES MODELES.....	12
2 – MODELE AUTOREGRESSIF POUR LES DEBITS.....	14
21 – INTERET D'UN MODELE DE DESCRIPTION DES SEULS DEBITS.....	14
22 – PRINCIPE ET MISE AU POINT DU MODELE.....	14
22.1 – PRINCIPE.....	14
22.2 – CARACTERISTIQUES MARGINALES DU PROCESSUS.....	15
22.3 – SCHEMA DE DEPENDANCE INTERNE DU PROCESSUS.....	17
22.4 – REMARQUE CONCERNANT LES DEBITS DE BASE.....	20
22.5 – LES VOLUMES COMPLEMENTAIRES.....	20
22.6 – LOI MARGINALE DES DEBITS JOURNALIERS.....	22
23 – DEVELOPPEMENTS ANALYTIQUES DU MODELE.....	23
23.1 – LOI CONDITIONNELLE DES DEBITS JOURNALIERS.....	23
23.2 – ETABLISSEMENT DU MODELE S/ DE COURTES SERIES D'OBSERVATIONS.....	24
23.3 – COMPARAISON AVEC D'AUTRES METHODES D'ESTIMATION.....	26
24 – SIMULATION.....	27
24.1 – NECESSITE DE LA SIMULATION.....	27
24.2 – SIMULATION SIMPLIFIEE.....	27
24.3 – SIMULATION ELABOREE.....	28
24.4 – UTILISATION DES DONNEES SIMULEES.....	29
25 – VERIFICATION DE LA VALIDITE DU MODELE.....	29
25.1 – COMPARAISON DES LOIS DE PROBABILITE.....	29
25.2 – SCHEMA DE DEPENDANCE INTERNE.....	33
26 – APPLICATION DU MODELE.....	33
26.1 – PREDETERMINATION.....	33
26.2 – PREVISION.....	35
27 – CONCLUSION.....	35
27.1 – CONCLUSION SUR L'INTERET DU MODELE.....	35
27.2 – LIMITES D'UN MODELE DE DESCRIPTION DES SEULS DEBITS.....	36
3 – MODELE PLUIES-DEBITS.....	36
31 – INTRODUCTION.....	36
32 – PRINCIPE GENERAL.....	37
32.1 – DESCRIPTION.....	37
32.2 – SCHEMA DE LA MISE EN OEUVRE.....	38
33 – DETERMINATION DES ECOULEMENTS ELEMENTAIRES.....	38
33.1 – TRI DES PLUIES EFFICACES.....	38
33.2 – DETERMINATION DES ECOULEMENTS ELEMENTAIRES.....	38
34 – PREMIER SOUS-MODELE : RELATIONS ENTRE ELEMENTS CLIMATOLOGIQUES ET ECOULEMENTS ELEMENTAIRES.....	40
34.1 – ORGANISATION DES PHENOMENES CLIMATOLOGIQUES.....	40
34.2 – PASSAGE DES ELEMENTS CLIMATOLOGIQUES AUX ECOULEMENTS ELEMENTAIRES.....	40

34.3	–	DONNEES PLUVIOMETRIQUES.....	41
34.4	–	L'EVAPOTRANSPIRATION.....	41
34.5	–	UTILISATION DE LA NOTION DE PLUIE LIMITE.....	43
34.6	–	AMELIORATIONS POSSIBLES DANS LE TRANSFERT PLUIES-DEBITS.....	46
35	–	DEUXIEME SOUS-MODELE : COMPOSITION DES ECOULEMENTS ELEMENTAIRES.....	46
35.1	–	BASES MATHEMATQUES DU MODELE DE COMPOSITION DES ECOULEMENTS D'APRES UNE CONFERENCE DE M.J. BERNIER.....	47
35.2	–	ELEMENTS NECESSAIRES A LA MISE EN OEUVRE DU SOUS-MODELE ELE- MENTAIRE.....	51
35.3	–	MISE EN OEUVRE D'UN SOUS-MODELE MODIFIE.....	52
35.4	–	VERIFICATION DE L'ADEQUATION DU MODELE.....	55
35.5	–	PROBLEMES D'ECHANTILLONNAGE. INTERVALLES DE CONFIANCE.....	58
36	–	UTILISATION DU MODELE.....	60
36.1	–	COMPLEMENTS SUR LA LIAISON PLUIES-ECOULEMENTS.....	60
36.2	–	OBTENTION DIRECTE DE RESULTATS CONCERNANT LES DEBITS.....	61
36.3	–	AMELIORATION DE LA CONNAISSANCE DES DEBITS PAR LA PRISE EN CONSI- DERATION DES PLUIES.....	61
36.4	–	LOI CONDITIONNELLE DES DEBITS.....	64
36.5	–	SIMULATION DES PLUIES ET DES DEBITS.....	66
37	–	CONCLUSIONS SUR LE MODELE PLUIES-DEBITS.....	67
37.1	–	RESULTATS OBTENUS.....	67
37.2	–	ASPECTS PROSPECTIFS.....	67
4	–	CONCLUSION.....	69
41	–	RESULTATS OBTENUS.....	69
42	–	ASPECTS PROSPECTIFS.....	69
42.1	–	ECHANTILLONNAGE ET INTERVALLES DE CONFIANCE.....	69
42.2	–	EXTENSION TEMPORELLE.....	70
42.3	–	EXTENSION GEOGRAPHIQUE ET INFORMATION EXTERIEURE.....	70

1 – INTRODUCTION

L'opération dont les lignes qui suivent rendent compte se situe dans un double contexte. Le premier aspect de la question concerne les bases scientifiques et les recherches effectuées par d'autres auteurs dans le même domaine, ou des domaines connexes. Le second aspect est la justification de l'intérêt pratique de l'étude effectuée, susceptible de recevoir des applications dans le domaine de l'art de l'ingénieur.

11 – CONTEXTE SCIENTIFIQUE

Le contexte scientifique de l'étude peut être à son tour examiné sous deux faces : problème des étiages et modèles mathématiques.

11.1 – LES ETIAGES

111.1 – DEFINITION

Le terme d'étiage est employé sous diverses acceptions ; il semble donc indispensable de préciser cette notion. Trois définitions principales sont généralement utilisées [1].

Tout d'abord, étant donnée la courbe des fréquences cumulées des débits mesurés en une station, on peut choisir des points particuliers de cette courbe, ou "débits caractéristiques" appelés ainsi parce qu'ils sont utilisés pour définir le régime d'un cours d'eau. Parmi ces valeurs on convient notamment d'appeler "débit caractéristique d'étiage" le débit dépassé en moyenne 355 jours par an [2].

On définit également souvent l'étiage comme le plus faible débit de l'année ou le plus faible débit moyen d'un nombre donné de jours consécutifs dans l'année. Pour être plus précis, calculons par exemple pour une station donnée tous les débits moyens de dix jours consécutifs et retenons pour chaque année la plus faible valeur observée. L'indice obtenu se prête bien à des études à caractère régional, concernant la comparaison de stations hydrométriques voisines, et la relation entre les faibles débits et différentes caractéristiques des bassins versants [3] [4] [5].

La troisième conception, la plus proche du sens commun, consiste à définir les étiages de façon relative comme le manque d'eau par rapport à un niveau de besoins donné. Suivant les applications, ce déficit peut être caractérisé par sa durée, son volume, son intensité maximale, etc. Cette définition, la plus fructueuse sur le plan pratique, est celle que nous avons retenue pour nos modèles.

Les étiages constituent en hydrologie un domaine relativement peu exploré jusqu'à ces dernières années, mais qui fait l'objet actuellement d'un ensemble de recherches assez important [3] [6]. Cette évolution dans l'intérêt porté aux étiages repose sur des raisons pratiques qui seront examinées plus en détail par la suite.

Il convient de ne pas perdre de vue une difficulté importante concernant les étiages. La mesure des bas débits est souvent très délicate, ce qui explique des lacunes fréquentes ou des invraisemblances dans les résultats publiés, concernant notamment les décennies passées. De toutes façons la précision des résultats est souvent médiocre, surtout à une échelle de temps fine [7].

11.2 – LES MODELES

112.1 – DEFINITIONS

Un modèle est un ensemble de relations mathématiques ou physiques présentant une similitude de propriétés avec un système naturel ou technologique. L'art de concevoir et d'utiliser de tels modèles constitue la simulation, au sens large [8]. En fait, suivant l'habitude des auteurs français, nous utiliserons désormais le terme de simulation au sens étroit de génération de données artificielles, question qui sera évoquée en détail lors de l'étude des modèles que nous avons développés.

112.2 – DIVERS TYPES DE MODELES EN HYDROLOGIE

Dans le domaine de l'hydrologie, on peut concevoir schématiquement deux types de modèles, correspondant à deux approches différentes des phénomènes.

La première attitude consiste à définir en termes de processus stochastiques le comportement des débits et, éventuellement, d'autres facteurs tels que la pluie, sans chercher à déterminer des relations causales. Cela conduit à ce qu'il est convenu d'appeler les "modèles probabilistes", en hydrologie.

L'autre attitude consiste à assimiler les mécanismes du cycle des eaux à un schéma physique (transfert entre différents réservoirs, etc.) ce qui conduit à des "modèles déterministes".

En pratique, il y a souvent interpénétration de ces deux points de vue pour les raisons suivantes. Tout d'abord l'analyse des phénomènes physiques peut constituer un guide fructueux dans la conception des modèles probabilistes et le choix d'hypothèses de liaisons entre variables aléatoires [9]. Inversement la complexité des phénomènes hydrologiques est telle qu'on ne peut prétendre les décrire complètement en termes déterministes. Dans l'hypothèse la plus optimiste, les modèles déterministes ne peuvent que décrire le passage des pluies aux débits, aussi pour la description des débits faut-il leur adjoindre des modèles aléatoires de pluies [10]. En fait, même la partie "déterministe" du modèle global ainsi constitué comportera toujours des aléas, le plus difficilement réductible semblant être le fait qu'il faille extrapoler des mesures ponctuelles à l'ensemble de la surface d'un bassin versant.

En définitive, il est vraisemblable que de plus en plus les modèles hydrologiques utilisés seront à la fois probabilistes et déterministes.

Depuis quelques années, un grand nombre de modèles ont été mis au point en hydrologie, ce qui résulte du fait que généralement chaque modèle vise plus spécialement un bassin donné et tend à résoudre un problème bien déterminé. On peut affirmer comme D.N. CHORAFAS que "... dans la plupart des cas, les études de simulation s'apparentent à la mise au point d'un médicament particulier s'adaptant aux besoins d'un patient isolé" [8]. Dans le cas de l'hydrologie, on pourrait même ajouter qu'un modèle est généralement adapté à une maladie particulière (étiages, crues ...) du patient concerné (le bassin versant étudié). Cette attitude pessimiste est en fait une attitude de prudence pour se garder des généralisations hâtives, mais, bien entendu, l'arrière pensée de généralisation est souvent présente dans l'élaboration des modèles. Dans beaucoup de cas, un modèle hydrologique pourra certainement se révéler applicable à divers bassins versants moyennant le changement de la valeur des paramètres. Au point où en sont parvenues les études en cette matière, il serait sans doute aussi intéressant d'effectuer un travail de synthèse sur les modèles existants et leur domaine possible d'application, que de créer de nouveaux modèles.

112.4' – LES MODELES PROBABILISTES EN HYDROLOGIE

Nous allons maintenant faire un tour d'horizon rapide des divers types de modèles probabilistes développés en hydrologie. Nous nous placerons à des échelles de temps décroissantes, correspondant à divers types d'applications.

A l'échelle annuelle, on admet le plus souvent que les apports en eau successifs présentent une autocorrélation négligeable, moyennant si nécessaire des hypothèses très élémentaires sur les reports en eau d'une année sur l'autre. Les modèles de ce type sont donc relativement simples, même en faisant intervenir les pluies [11] [12] [13].

A l'échelle mensuelle, les choses se compliquent évidemment du fait des variations saisonnières et de l'autocorrélation des valeurs successives des débits [14] [15] [16].

La majorité des modèles sont établis à partir de données de débits moyens journaliers et il en existe une grande diversité. Certains modèles ne font intervenir que les débits et sont donc strictement probabilistes (références [17] à [24]). Tel est le cas du premier modèle que nous avons mis au point (chapitre 2). D'autres font intervenir les pluies par de simples corrélation linéaires avec les débits et peuvent donc être également considérés comme purement probabilistes [25]. D'autres enfin sont des modèles mixtes faisant intervenir des hypothèses déterministes sur la transformation des pluies en débits [26]. Notre deuxième modèle (chapitre 3) est de ce type.

Les modèles de débits journaliers peuvent aussi se distinguer du point de vue des phénomènes étudiés. Il existe des modèles destinés à décrire les crues [20] [21], d'autres destinés à décrire les étiages [22] [24] et enfin des modèles visant à décrire l'ensemble des débits journaliers de l'année ou d'une saison particulière [17] [18] [19] [23]. En pratique, certains de ces derniers, pour des raisons qui seront évoquées au § 12.1, se justifient essentiellement pour traiter le problème des étiages. Les deux modèles que nous avons mis au point sont dans ce cas.

Notons enfin qu'il existe des modèles visant à décrire les débits à une échelle plus fine que la journée [27].

Après avoir examiné le contexte scientifique dans lequel se situe notre étude, il paraît indispensable de faire ressortir l'intérêt que peut présenter ce genre de travail pour les applications pratiques de l'hydrologie.

12.1 – DEVELOPPEMENT DU PROBLEME DES ETIAGES

Dans la plupart des aménagements hydrauliques d'une certaine importance réalisés jusqu'à présent, il y a intervention de réserves permettant d'assurer une régulation annuelle et parfois interannuelle des débits. Dans ce contexte les problèmes hydrologiques essentiels concernent les apports annuels et les crues exceptionnelles pour la conception des ouvrages, et les apports mensuels pour leur gestion. Ces questions constituent la majorité des publications antérieures à 1965 en matière d'hydrologie appliquée à l'art de l'ingénieur.

En fait, il faut bien voir se dessiner dans ce domaine une évolution inévitable provenant de deux facteurs conjugués : d'une part l'écrémage progressif des sites de barrages les plus intéressants, laissant prévoir un coût relatif croissant pour les réalisations futures, d'autre part, l'augmentation continue de la demande en eau. Ces conditions ne peuvent qu'entraîner la multiplication des cas dans lesquels il sera nécessaire de tirer parti de ressources au fil de l'eau pouvant constituer, en période d'étiage, un goulot d'étranglement dans le développement des aménagements. Ces circonstances justifient la mise au point de modèles de débits journaliers adaptés aux problèmes des étiages, c'est-à-dire aux risques de déficit par rapport à des besoins fixés. Observons que pour le problème envisagé, il est inutile que les modèles prétendent à une description fidèle des débits à l'échelle de la journée, et qu'ils intéressent la totalité de l'année. En particulier, nos deux modèles ne révèlent une bonne adéquation à la réalité qu'à l'échelle de cinq jours au moins, et nous les avons réglés uniquement pour une période de trois mois en été (cette option n'ayant d'ailleurs rien de définitif et pouvant être élargie à la demande).

12.2 – INTERET DES MODELES

122.1 – INTERET GENERAL DES MODELES

De la définition même des modèles (§ 112.1) nous pouvons tirer les corollaires suivants :

- le modèle est un outil très général pour la pratique, dans la mesure où les questions posées s'expriment en termes logiques ou quantitatifs (qu'il s'agisse de modèles mathématiques ou physiques) car la réponse sera donnée par la résolution d'un système de conditions mathématiques ou logiques, résolution toujours possible, serait-ce de façon approchée, si les questions posées ne sont pas absurdes,
- les différents résultats obtenus à partir d'un même modèle sont toujours cohérents [10].

122.2 – INTERET DES MODELES EN HYDROLOGIE

La mise au point des modèles en hydrologie repose sur l'analyse de données historiques qui représentent un échantillon statistique souvent très réduit, compte tenu de l'application qu'on veut en faire.

Supposons par exemple que nous voulions déterminer en probabilité pour une station donnée le volume des déficits par rapport à différents niveaux de besoins. Si nous disposons de données sur une longue période (par exemple 30 ans de débits journaliers), pour traiter un problème de ce genre, nous pourrions noter les différentes valeurs prises par chacune des variables aléatoires qui nous intéressent, procéder à un classement de ces valeurs et effectuer éventuellement des ajustements à des lois de probabilité [11]. (Observons au passage que cette façon de faire constitue un modèle probabiliste, évidemment très rudimentaire).

En fait, une telle méthode devient inapplicable dès qu'on s'intéresse à des réalisations de faible probabilité, pour lesquelles les observations sont en très petit nombre. Dans de nombreux cas, en pratique, on ne dispose même pas d'une dizaine d'années d'observations et les possibilités d'estimation directe de distributions de probabilité deviennent très réduites.

Dans de telles circonstances l'utilisation d'un modèle convenable permettra de tirer le meilleur parti des données disponibles et de fournir des estimations sur les problèmes auxquels on s'intéresse. Les exemples d'application relatifs à notre premier modèle (§ 271.2) feront ressortir plus clairement l'intérêt de cette opération.

Un modèle constitue un outil d'une certaine souplesse qu'il est possible d'affiner progressivement en fonction de nos progrès dans la connaissance des phénomènes hydrologiques du bassin versant considéré, de façon à synthétiser le plus d'information possible. Ainsi, même si le modèle ne constitue pas en soi un outil de recherche, il permet de faire la synthèse des connaissances acquises, de vérifier éventuellement la validité de certaines hypothèses et d'utiliser le mieux possible l'information disponible en vue des applications.

122.3 – LIMITES DES MODELES EN HYDROLOGIE

Si un modèle permet de tirer le meilleur parti de l'information, il ne peut évidemment pas prétendre en créer, ainsi :

- la précision des résultats obtenus est fonction de la durée des observations de base,
- la précision des résultats fournis sur les débits qui ont servi à établir le modèle ne peut être supérieure à celle des mesures,
- le modèle subit les perturbations éventuelles affectant les débits naturels à la station hydrométrique concernée.

122.4 – PROBLEMES PRATIQUES RELATIFS AUX ETIAGES

Dans le domaine de l'application de l'hydrologie à la conception et la gestion de systèmes hydrauliques, on peut être amené à faire face à deux types essentiels de problèmes.

Tout d'abord ce qu'on peut appeler la prédétermination consiste à estimer des probabilités *a priori* ou marginales au sujet des variables auxquelles on s'intéresse. Ce point de vue est essentiellement celui du projeteur. Les exemples traités au § 271.2 illustrent ce type de préoccupation.

En contrepartie le gestionnaire d'un ensemble hydraulique s'intéresse plutôt à des probabilités conditionnelles relatives à des événements à venir, connaissant les conditions hydrologiques à un instant donné. C'est dans ce domaine que les modèles ont reçu jusqu'ici la plus large application et certains d'entre eux ont été conçus essentiellement dans ce but de prévision [18] [26] [28].

En fait de nombreux modèles sont susceptibles de faire face à ces deux types de préoccupations ; tel est le cas des deux modèles que nous présentons dans les lignes qui suivent.

2 – MODELE AUTOREGRESSIF POUR LES DEBITS

21 – INTERET D'UN MODELE DE DESCRIPTION DES SEULS DEBITS

L'idée la plus simple pour mettre au point un modèle de débits consiste évidemment à ne s'intéresser qu'à ceux-ci, à l'exclusion de tous les facteurs qui les conditionnent. Nous pouvons ainsi espérer *a priori* obtenir un modèle relativement simple et rapidement opérationnel, avec l'arrière pensée de le perfectionner éventuellement par la suite en faisant intervenir d'autres éléments d'information.

Telle est l'idée qui nous a conduits à élaborer le modèle dont nous allons maintenant exposer le principe. La mise au point a été d'abord effectuée avec les débits mesurés du 15 juin au 15 septembre à la Station de Kercabanac, sur le Salat affluent de la Garonne [29] [30]. Le même modèle a ensuite été utilisé pour les débits de la station de Pont-du-Bouchet, sur la Sioule affluent de l'Allier.

22 – PRINCIPE ET MISE AU POINT DU MODELE

22.1 – PROCESSUS DES "DEBITS DE BASE" ET DES "VOLUMES COMPLEMENTAIRES"

Considérons la suite des débits moyens journaliers de la période 15 juin - 15 septembre, pour une année déterminée, à la station de Kercabanac, ce qui nous donne une courbe ayant l'allure suivante :

L'ensemble constitué par une crue, si petite soit-elle, et par la décrue qui la suit, constitueront une "réaction". Sur la figure 1, une réaction sera constituée par l'ensemble des débits journaliers compris entre deux points " γ " successifs, ces points γ étant les minimums relatifs de la suite.

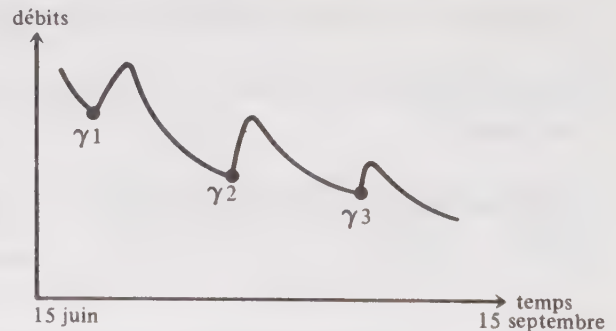


fig. 1

Nous considérons que le processus des débits est constitué par la superposition d'un processus de "débits de base" et de volumes complémentaires "W" relatifs à chaque réaction.

Nous prenons comme processus des débits de base un processus mathématique que nous allons définir et qui passe par les points γ , (Il ne s'agit d'ailleurs pas nécessairement du "débit de base" tel qu'on l'entend en hydrologie déterministe comme provenant des écoulements souterrains).

Nous obtiendrons ainsi le schéma suivant :

Etant donné que nous n'avons pas l'intention de décrire les débits avec précision à l'échelle journalière, mais seulement à l'échelle de quelques jours on peut considérer pratiquement que malgré cette simplification de la chronique des débits nous utilisons complètement l'information "débit". En outre la relative simplicité du processus des points γ dont nous allons maintenant parler, justifie *a posteriori* l'intérêt de la méthode.

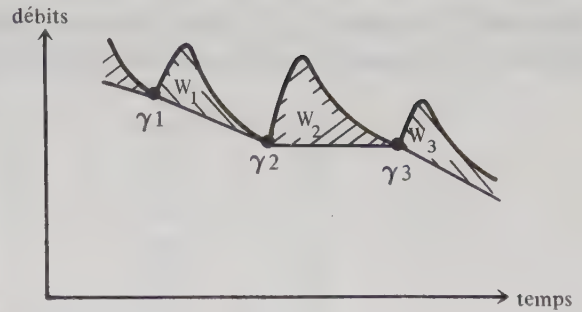
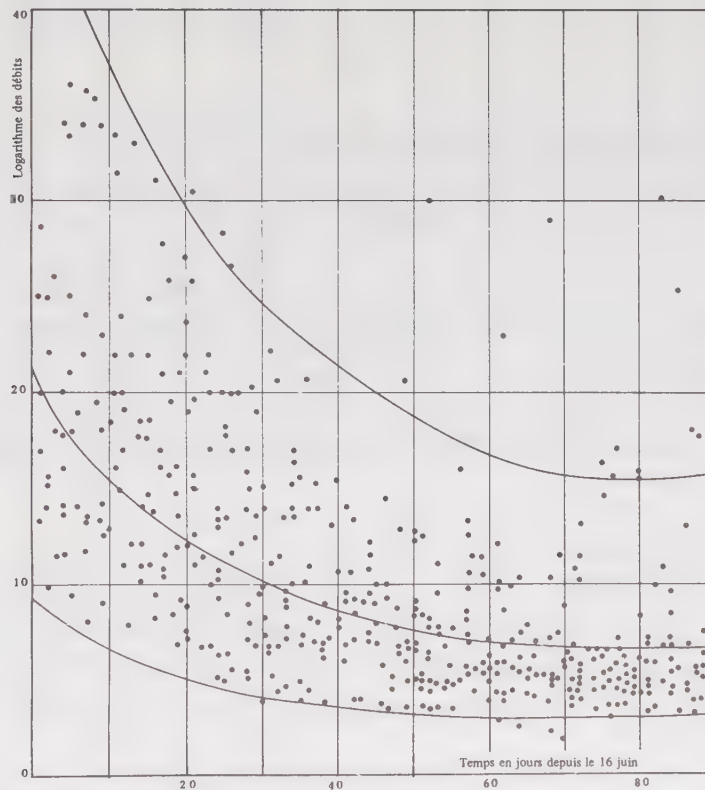


fig. 2

22.2 – CARACTERISTIQUES MARGINALES DU PROCESSUS

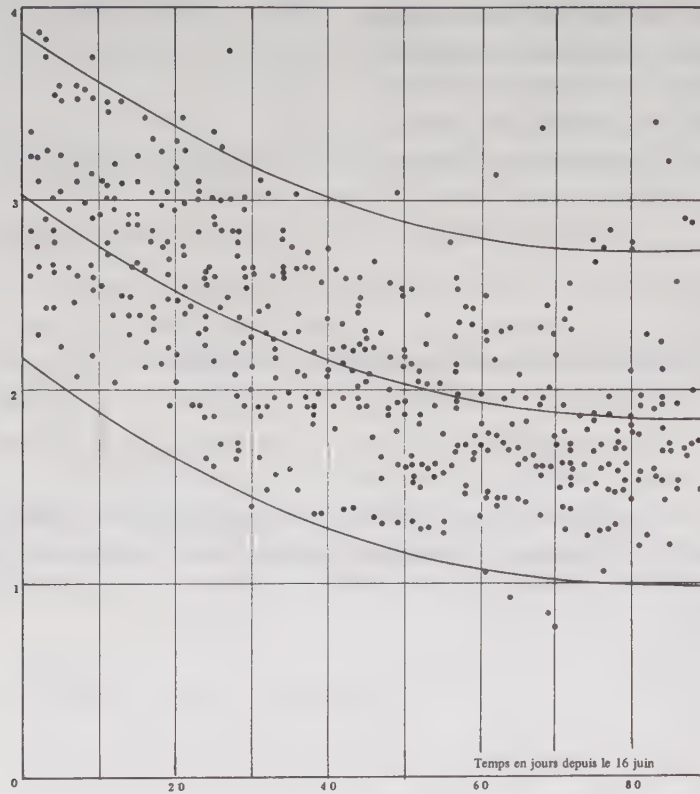
Nous allons d'abord étudier le processus des débits "de base".

Considérons donc les débits " $Q \gamma$ " empiriques aux points γ , relevés sur les 28 années d'observations dont nous disposons à Kercabanac (période 1940 - 1967) – Les points γ sont reportés au graph. 1.



graph. 1

La répartition des valeurs de $Q\gamma$ présente une forte dissymétrie positive — Nous nous intéressons donc aux valeurs de $\text{Log } Q\gamma$, suivant les errements classiques, ce qui nous fournit le nuage de points “g” du graph. 2. Ce nuage est moins informe que le précédent. Il ne présente plus de dissymétrie évidente et fait apparaître nettement une tendance générale curviligne.



graph. 2

L'hypothèse la plus simple pour décrire cette constatation est de supposer que cette tendance est parabolique. (L'assimilation à une exponentielle, *a priori* plus simple, donnerait une courbe de régression trop “tendue”).

En appelant “t” le nombre de jours écoulés depuis le 15 juin, l'hypothèse retenue s'écrit :

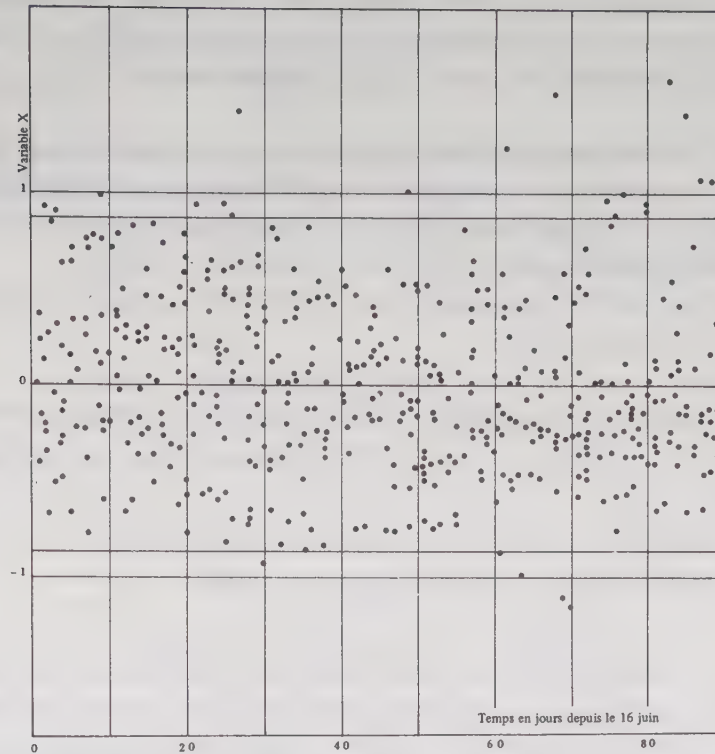
$$E (\text{Log } Q) = At^2 - Bt + C \quad (1)$$

Cette courbe est estimée par la parabole des moindres carrés des écarts de $\text{Log } Q$. La recherche des paramètres A, B, C est simple et se ramène à la résolution d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues.

Posons maintenant le changement de variable :

$$x = \text{Log } Q - (At^2 - Bt + C) \quad (2)$$

Les points x obtenus ont une tendance générale stationnaire. Nous les avons fait figurer au graph. 3.



graph. 3

L'examen de ce graphique nous autorise à supposer que les points x représentent un processus dont la loi marginale est caractérisée par une moyenne $E(x) = 0$ et une variance $\text{Var}(x)$ constante. Cette loi très peu dissymétrique sera pratiquement assimilée à une loi normale. Nous dirons que le processus des points x est laplacien et stationnaire [31].

Ces points x nous permettent de calculer le paramètre $\text{Var}(x)$, ainsi que des quantiles pour la loi de probabilité de x . Sur le graph. 3 nous avons porté la droite horizontale d'ordonnée 0 qui représente la valeur de la moyenne et de la médiane de x , ainsi que les quantiles correspondant aux fréquences cumulées 0,025 et 0,975 qui déterminent un intervalle contenant théoriquement 95 % des observations.

A ces trois droites correspondent évidemment trois arcs de paraboles pour la loi de probabilité de $\text{Log } Q$ (graph. 2) et trois autres courbes pour la loi de probabilité de Q , (graph. 1). Ces courbes permettent de comprendre plus clairement les changements de variables opérés.

22.3 – SCHEMA DE DEPENDANCE INTERNE DU PROCESSUS

223.1 – TYPE DE PROCESSUS

Le processus ainsi décrit n'est pas complètement défini. Les paramètres A , B , C , $\text{Var}(x)$ sont des caractéristiques marginales qui ne préjugent pas de la règle de dépendance interne liant les valeurs successives d'une variable dans le temps.

Cette dépendance sera bien entendu étudiée sur le processus des points x , qui est le plus simple. L'hypothèse la plus élémentaire consiste à poser qu'il s'agit d'un processus markovien [31] ce qui signifie que l'état du processus à un instant donné suffit à déterminer son avenir en probabilité, sans qu'il y ait besoin de connaître son passé. Pour plus de clarté nous dirons que la loi de probabilité de $Q_{\gamma_{i+1}}$ sera entièrement définie par régression par rapport à Q_{γ_i} , indépendamment de $Q_{\gamma_{i-1}}$, $Q_{\gamma_{i-2}}$, etc.

Cette liaison des valeurs successives par régression (linéaire) justifie le qualificatif d' "autorégressif" donné au processus. Les hypothèses de caractère markovien et de liaison par régression linéaire impliquent que le coefficient d'autocorrélation liant deux observations quelconques de la même séquence séparées de la durée Δt soit de la forme :

$$r(\Delta t) = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \quad (3)$$

τ étant appelé "temps de corrélation", et constituant le dernier paramètre à estimer pour définir complètement le processus des points γ .

223.2 – ESTIMATION DU TEMPS DE CORRELATION

Dans la plupart des applications de ce type de processus, les observations sont également espacées dans le temps et un simple calcul d'autocorrélation fournit immédiatement τ : il suffit de poser dans la formule (3) que Δt est égal à l'intervalle de temps constant séparant les valeurs successives du processus. Cette hypothèse permet également d'appliquer des tests concernant le caractère markovien du processus.

Malheureusement dans notre modèle l'intervalle de temps "C" séparant deux valeurs successives de Q_{γ} est une variable aléatoire. Il faut donc mettre au point un procédé particulier d'estimation de τ . On peut d'abord imaginer de calculer le coefficient d'autocorrélation pour chaque valeur particulière de C, et d'ajuster ensuite une courbe exponentielle aux valeurs trouvées.

En pratique il s'avère qu'aucune estimation valable n'est possible en raison de l'importance des variances d'échantillonnage relatives au résultats, et ceci bien que nous disposions au total de 487 couples d'observations pour 28 années.

Pour estimer ce paramètre τ , il faut donc trouver une méthode qui fasse intervenir globalement toute l'information disponible.

Nous avons déduit des observations de C que cette variable suit une loi de probabilité proche de la loi exponentielle, dont la densité peut s'écrire de la façon suivante (c étant une réalisation quelconque de C).

$$f(c) = \frac{1}{\bar{c}} e^{-\frac{c}{\bar{c}}} \quad (4)$$

Nous avons calculé le coefficient d'autocorrélation globale r' de toutes les valeurs de x , quel que soit l'intervalle de temps c les séparant.

Il s'agit alors de trouver comment déduire τ de r' . Pour simplifier les raisonnements, nous allons utiliser la variable centrée réduite y déduite de x par la relation

$$y = \frac{x}{\text{Ecart - type } (x)}$$

Il est évident que les conclusions portant sur des corrélations ne seront pas modifiées par un tel changement de variable.

Soient deux valeurs consécutives y_i , y_{i+1} de cette variable. Pour tous les couples d'observations successives séparées par l'intervalle c_j , nous aurons pour expression du coefficient de corrélation :

$$r(c_j) = E \{ (y_i \cdot y_{i+1}) \mid c_j \} = e^{-\frac{c_j}{\tau}}$$

valeur à laquelle s'attache la probabilité déduite de (4) : $\frac{1}{\bar{c}} e^{-\frac{c_j}{\bar{c}}}$

Pour l'ensemble des valeurs c_j possibles, le coefficient de corrélation globale devient alors

$$r' = E(y_i \cdot y_{i+1}) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{c}{\tau}} \cdot \frac{1}{\bar{c}} e^{-\frac{c}{\bar{c}}} dc$$

ce qui donne en définitive la relation cherchée : $r' = \frac{\tau}{\bar{c} + \tau}$ (5)

A défaut du raisonnement précédent, on pourrait envisager de résoudre le problème de façon approchée en assimilant tous les intervalles c à leur moyenne $\bar{c}$, ce qui reviendrait à utiliser la formule (3) en posant $\Delta t = \bar{c}$.

En fait, pour des valeurs relativement faibles de $\bar{c}$, les estimations données par (3) et (5) sont très voisines comme on peut en juger sur leurs développements en série respectifs :

$$1 - \frac{\bar{c}}{\tau} + \frac{\bar{c}^2}{\tau^2} + O\left(\frac{\bar{c}^3}{\tau^3}\right)$$

$$1 - \frac{\bar{c}}{\tau} + \frac{\bar{c}^2}{2\tau^2} + O\left(\frac{\bar{c}^3}{\tau^3}\right)$$

Autrement dit la prise en considération du caractère aléatoire de C joue peu en pratique, ce qui justifie *a fortiori* des approximations sur la loi de probabilité de cette variable pour l'estimation de τ .

Sur la série de 28 ans, nous trouvons $\tau = 20$, valeur à rapprocher de celles qui figurent dans d'autres études sur les processus autorégressifs appliqués à l'hydrologie [32].

Le processus “y” est ainsi complètement défini et peut se résumer dans la formule suivante qui permet le passage en probabilité d’une valeur y_i à une valeur ultérieure quelconque y_{i+1} éloignée de l’intervalle de temps t :

$$y_{i+1} = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot y_i + \sqrt{1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}} \cdot u \quad (6)$$

u étant une réalisation de la variable normale centrée réduite.

En utilisant les changements de variable précédemment définis, nous pouvons donc passer d’une valeur Q_{γ_i} à la loi de probabilité d’une valeur ultérieure $Q_{\gamma_{i+1}}$.

22.4 – REMARQUE CONCERNANT LES DEBITS DE BASE

Nous n’avons fait qu’évoquer incidemment le processus temporel réglant l’apparition des points γ dans le déroulement du processus autorégressif des débits de base. En fait cet aspect de la question apparaît comme secondaire dans le modèle. En effet nous avons pu tout d’abord définir la loi marginale des débits de base sans tenir compte de la variable C . Ensuite nous avons vu qu’une approximation même grossière sur la loi de probabilité de cette variable affectait peu le schéma de dépendance interne du processus.

Une conséquence intéressante de ces observations est que l’estimation du processus n’exige pas l’existence de tous les points “ γ ” sur la chronique des débits journaliers utilisée, ce qui permet de prendre en compte des mesures perturbées ou affectées d’interruptions accidentelles.

Malgré tout nous serons obligés d’utiliser la variable C dans le développement du modèle, d’abord sous la forme de la moyenne $\bar{c}$ pour définir l’incidence des volumes complémentaires W sur les débits (§ 23.1). Par la suite il faudra tenir compte de façon plus précise de la loi de probabilité de C pour simuler des débits journaliers.

22.5 – LES VOLUMES COMPLEMENTAIRES W

225.1 – DETERMINATION DE W SUR LES OBSERVATIONS

Une remarque préliminaire essentielle est que les volumes W représentent une part relativement faible des débits totaux (20 % dans le cas de Kercabanac). Nous pouvons donc considérer ces écoulements complémentaires comme un facteur correctif, ce qui autorise un certain nombre d’approximations auxquelles nous sommes obligés de procéder pour faire aboutir les calculs. La vérification du modèle justifiera d’ailleurs *a posteriori* ces approximations.

La première question qui se pose est de savoir comment déterminer les valeurs de W sur les observations. En effet, si les points γ se lisent de façon immédiate sur la chronique des débits, le processus des débits de base est indéterminé entre deux points γ successifs. Compte tenu de l’approximation que nous pouvons nous permettre sur W , nous convenons de faire comme si le débit de base variait linéairement entre ces deux points, W étant le supplément d’écoulement observé par rapport à ce débit de base (fig. 2).

Nous définissons simplement ces volumes par leur moyenne et leur variance, dont nous verrons au § 23.1 l’utilisation.

L'hypothèse la plus simple consiste évidemment à poser que la moyenne et la variance de W sont stationnaires durant la période considérée. Cette hypothèse conduit par la suite à une mauvaise adéquation du modèle. Dans ces conditions, nous faisons une autre hypothèse simple qui consiste à supposer que, W étant lié à Q, la dispersion des valeurs de W est proportionnelle à leur moyenne, ce qui peut se traduire par une régression homoscedastique en coordonnées logarithmiques. Là encore le résultat n'est pas satisfaisant, la moyenne conditionnelle s'avérant très exagérée, du fait sans doute que les plus faibles valeurs de W, très nombreuses, prennent un poids trop important en coordonnées logarithmiques. En définitive, nous avons conservé les mêmes hypothèses, mais en travaillant cette fois en coordonnées normales. Il s'agit alors d'estimer les deux paramètres "a" et "b" de la droite des moindres carrés $W = aQ + b$, ainsi que le rapport :

$$k = \frac{\text{Ecart-type conditionnel de W}}{\text{Moyenne conditionnelle de W}}$$

ce qui finalement ne fait pas plus de paramètres à estimer que dans l'hypothèse précédente. Le paramètre k peut s'estimer comme il suit :

$$k^2 = \frac{\text{Variance conditionnelle de W}}{\text{Carré de la moyenne conditionnelle W}} = \frac{1}{N} \sum \left(\frac{W}{aQ_{\gamma} + b} - 1 \right)^2$$

Il apparaîtra par la suite que l'adéquation est satisfaisante dans ces conditions.

Nous examinerons dans des paragraphes ultérieurs les façons dont sont prises en compte les caractéristiques de W dans la construction du modèle, suivant que l'on cherche à obtenir des résultats par calcul ou par simulation.

225.3 – PRISE EN COMPTE DE W POUR OBTENIR LA LOI DES DEBITS

Nous allons remplacer le volume W, réparti sur une durée aléatoire, par un débit complémentaire h'' applicable à une durée d'un jour. Pour avoir un ordre de grandeur de $\bar{h}''$ et $\text{Var}(h'')$, on peut remplacer les réactions de durée aléatoire c par des réactions de durée uniforme $\bar{c}$, ce qui conduit aux estimations suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \bar{h}'' = \frac{\bar{W}}{\bar{c}} \\ \text{Var}(h'') = \frac{\text{Var}(W)}{(\bar{c})^2} \end{array} \right.$$

La moyenne $\bar{c}$ étant voisine de 5 jours, le résultat obtenu est certainement plus proche de la loi du débit moyen complémentaire de 5 jours consécutifs que de la loi du débit complémentaire journalier. Nous emploierons néanmoins l'expression de "débits journaliers" pour qualifier les débits obtenus, pour plus de clarté.

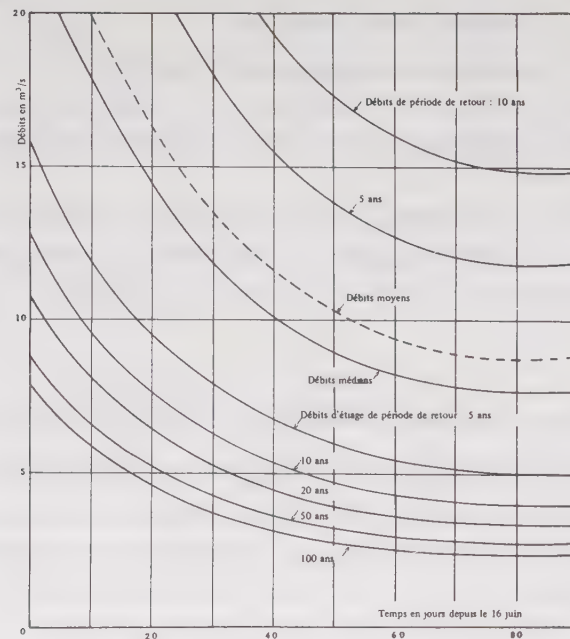
22.6 – LOI MARGINALE DES DEBITS JOURNALIERS

Les volumes W constituant une part réduite de l'écoulement total, nous faisons l'hypothèse que la loi des débits journaliers est, comme la loi des écoulements de base, une loi log normale, dont la moyenne et la variance seront obtenues par composition de la moyenne et de la variance des lois de W et des débits de base Q_γ .

Compte tenu de la dépendance qui existe entre Q_γ et W , la moyenne et la variance de la loi des débits journaliers s'estiment comme il suit :

$$\begin{cases} m = \bar{Q}_\gamma + \bar{h}'' \\ s^2 = \text{Var}(Q_\gamma) + \text{Var}(h'') + 2 \text{Covar}(Q_\gamma, W) \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi un premier résultat, qui concerne la loi marginale des débits journaliers, supposée log normale, de moyenne m et de variance s^2 . L'estimation effectuée sur les 28 ans de mesures dont nous disposons à Kercabanac, pour la période 15 juin – 15 septembre, est synthétisée par le graph. 4.



graph. 4

Les opérations effectuées aux § 22.5 et 22.6 peuvent paraître discutables et inélégantes, mais nous insistons sur le fait que ces approximations

- *a priori*, nous ont paru indispensables pour mener à bien les calculs et être ainsi en mesure de confronter le modèle aux données de base.
- *a posteriori*, sont justifiées par le fait que la confrontation se révèle favorable.

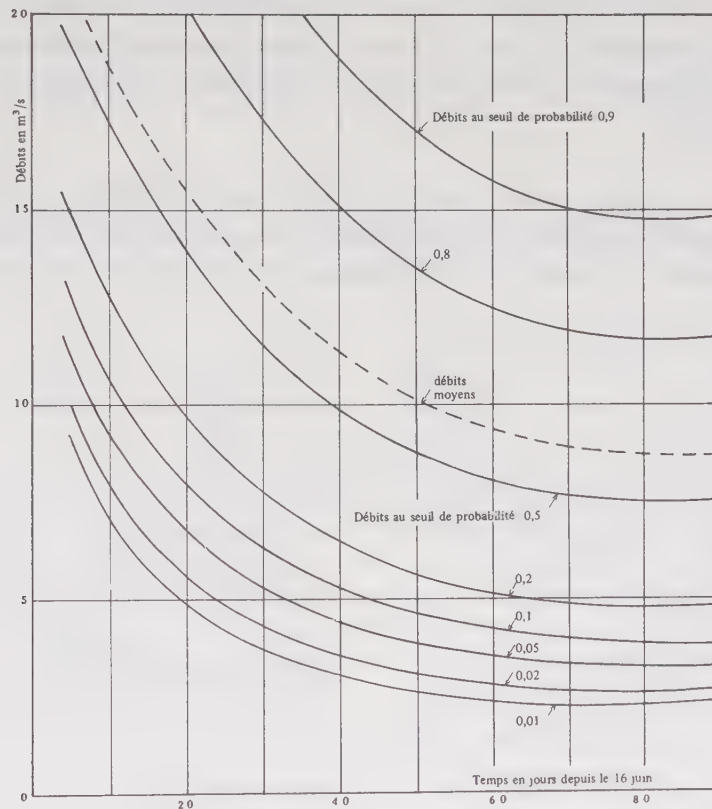
La loi de probabilité ainsi obtenue a constitué essentiellement un outil de travail pour la mise au point du modèle, et, en particulier pour le choix d'hypothèses plausibles concernant W , mais ne suffit pas pour la vérification complète de la validité du modèle. Cette vérification exige le recours à la simulation et sera donc traitée dans un paragraphe ultérieur.

23 – DEVELOPPEMENT ANALYTIQUE DU MODELE

En dehors de la loi marginale des débits journaliers, nous avons pu obtenir quelques autres résultats sans recourir à la simulation.

23.1 – LOI CONDITIONNELLE DES DEBITS JOURNALIERS

Le schéma de dépendance interne résumé par la formule (6) permet d'obtenir la loi conditionnelle des débits à venir connaissant le débit de base à une date quelconque de la période 15 juin – 15 septembre. Le graph. 5 traite l'exemple d'un débit de base de $20 \text{ m}^3/\text{s}$ au 15 juin.



graph. 5

Comme dans le cas précédent, la variable concernée est le débit moyen de 5 jours consécutifs plutôt que la moyenne journalière. C'est d'ailleurs pour cette raison que les courbes ne sont pas tracées depuis la date initiale, la prévision à une échéance de quelques jours n'ayant pas de signification avec notre modèle. Pour la prévision plus précise des débits journaliers proprement dits dans un délai rapproché, on pourra se référer à un autre modèle autorégressif mieux adapté [18].

23.2 – ETABLISSEMENT DU MODELE SUR DE COURTES SERIES D'OBSERVATIONS

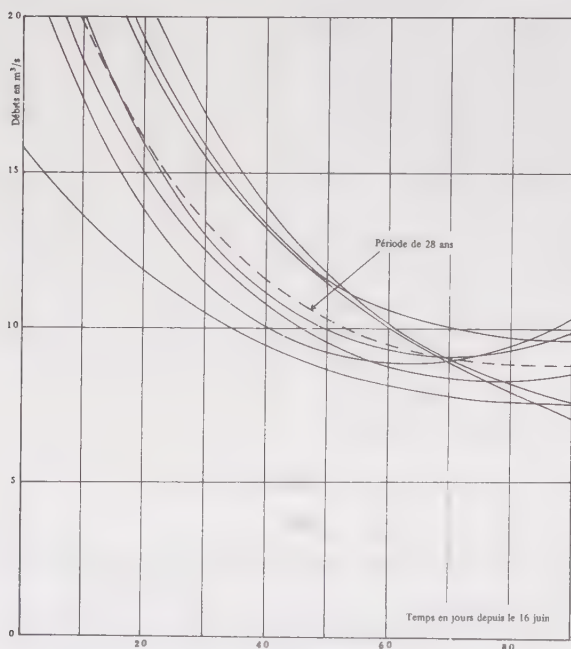
Nous avons pu voir dans les paragraphes précédents que l'établissement du modèle exigeait l'estimation d'assez nombreux paramètres. La question essentielle qui se pose sur le plan pratique consiste à savoir s'il est possible malgré cela d'établir le modèle à partir de courtes séries d'observations.

Nous avons découpé la période de 28 ans d'observations du Salat à Kercabanac en 7 séries de 4 ans et 4 séries de 7 ans. Sur chacune de ces périodes nous avons refait les mêmes calculs que sur la série de 28 ans, ce qui a toujours été possible sans conduire à des résultats aberrants.

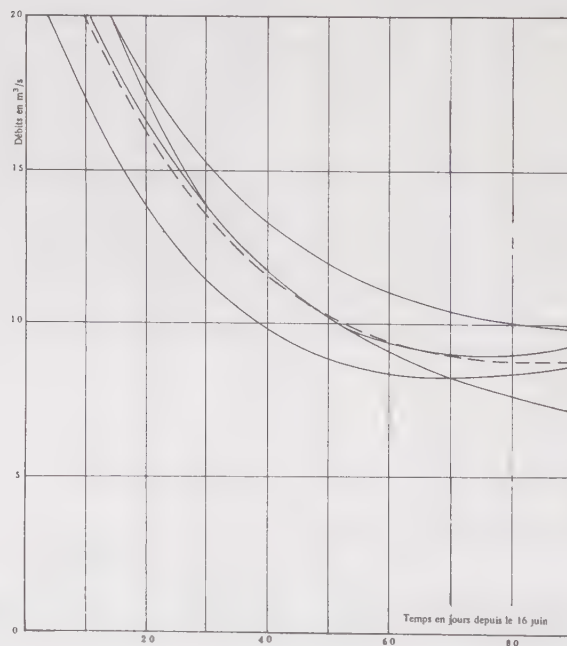
Il est évidemment essentiel de se rendre compte de la dispersion des résultats obtenus à partir des différents modèles ainsi établis. Les graph. 6 et 7 donnent la valeur des moyennes obtenues. Les graph. 8 et 9 donnent les écarts-types, et les graph. 10 et 11 les débits d'étiage décennaux. Les graph. 6, 8 et 10 concernent les 7 périodes de 4 ans, et les graph. 7, 9 et 11 les 4 périodes de 7 ans.

Suivant la précision exigée par les applications que l'on a en vue, on pourra s'estimer satisfait ou non par la dispersion des résultats obtenus. En fait il faut bien voir que le modèle n'est pas ici en cause, mais le fait que l'information de base qui a servi à l'établir est réduite. En définitive le modèle exploite cette information le mieux possible et permet d'utiliser de courtes séries d'observations, ce qui pratiquement est d'une importance capitale.

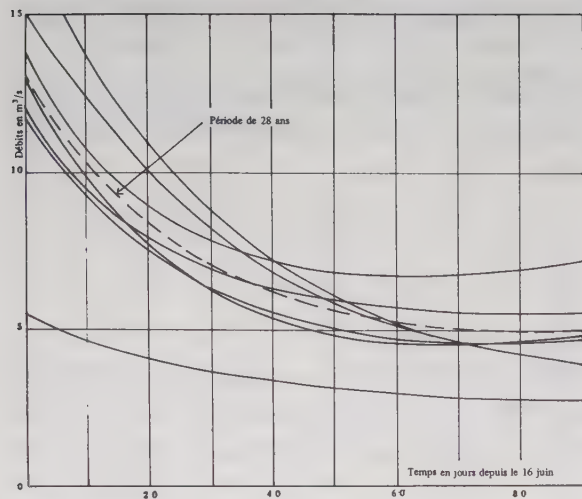
Nous avons ainsi abordé de façon grossière la question de la distribution d'échantillonnage sur les estimations. Pour traiter de façon plus précise les problèmes d'échantillonnage et d'intervalles de confiance, il faut recourir à la simulation. Cette question, commune aux deux modèles, sera abordée dans le chapitre de conclusion.



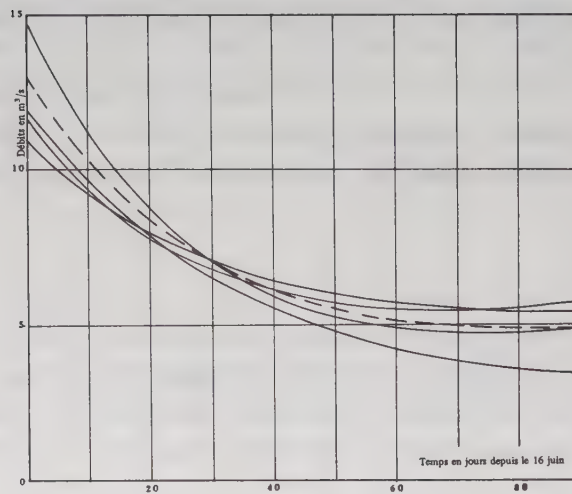
graph. 6



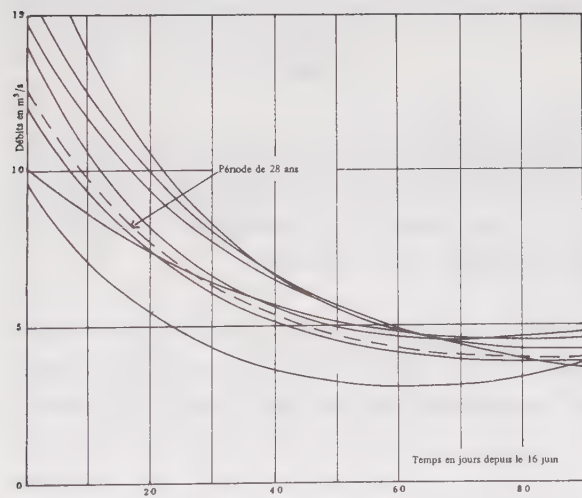
graph. 7



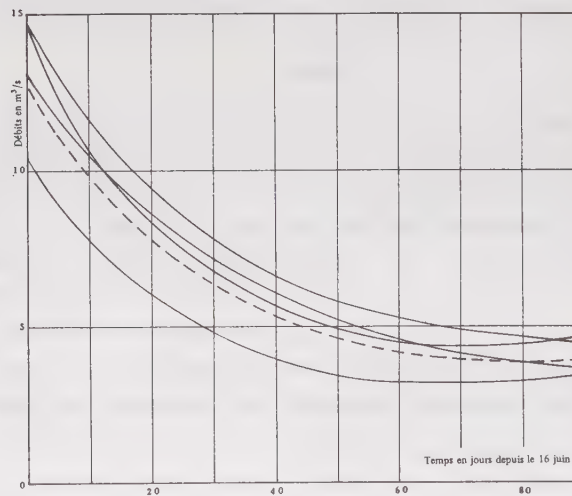
graph. 8



graph. 9



graph. 10



graph. 11

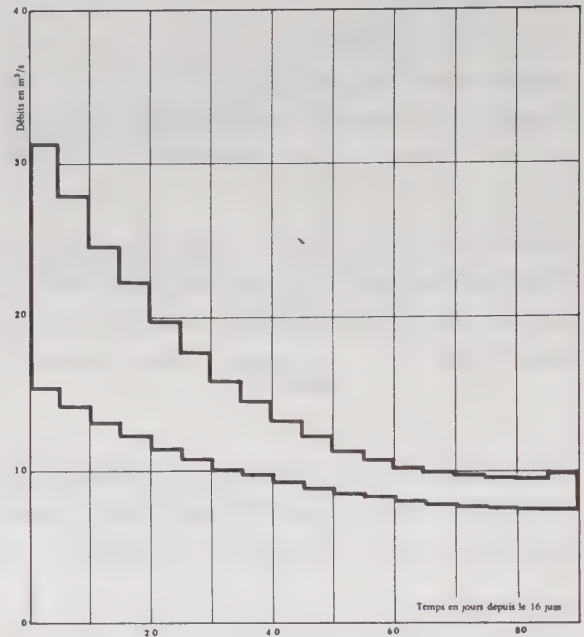
23.3 – COMPARAISON AVEC D'AUTRES METHODES D'ESTIMATION

Quelques résultats tels que le débit moyen susceptible de s'écouler pendant une période donnée peuvent être obtenus à partir d'une courte série d'observations sans avoir recours à un modèle mathématique. Il est intéressant de voir dans ces conditions si le modèle peut apporter un gain de précision.

Nous avons d'abord comparé les débits moyens de 5 jours* obtenus de façon purement empirique à partir des 7 séries de 4 ans du Salat (Graph. 12) et les mêmes éléments déduits du modèle appliqué aux mêmes séries d'observations (Graph. 13).



graph. 12



graph. 13

Le gain de précision dû au modèle semble important dans l'ensemble. Néanmoins il faut se rendre compte de ce que les écarts qui font l'objet de cette comparaison sont sujets à une erreur d'échantillonnage très importante ; il faut donc se méfier de conclusions catégoriques telles que celle qui consisterait à dire que le modèle est plus intéressant pour septembre que pour juillet.

La même comparaison effectuée sur les résultats obtenus à partir de 4 séries de 7 ans montre un avantage moins net pour le modèle, mais ceci est peut-être fortuit et on ne peut conclure pour la raison précédente que l'utilisation du modèle est d'autant plus rentable que la série à laquelle on s'intéresse est plus courte.

Notons qu'un essai d'amélioration des résultats empiriques par corrélation directe avec les données d'une station voisine (l'Ariège à Foix) n'a donné aucun résultat intéressant malgré la proximité des deux stations, ceci pour confirmer que dans le cas présent, et certainement dans la plupart des cas qui se présentent en pratique, le modèle mathématique reste la méthode d'estimation la plus intéressante pour une échelle de temps fine.

* – C'est-à-dire plus précisément débit moyen de la période 16 juin - 20 juin, débit moyen de la période 21 juin - 24 juin, etc.

Il est évident que l'intérêt du modèle pour cette étude de moyenne est due au fait que celui-ci effectue un certain lissage des irrégularités expérimentales. Dans ces conditions, lorsque l'on prend des périodes de comparaison dont les durées s'allongent, il y a compensation dans les erreurs expérimentales, et l'avantage du modèle sur les moyennes calculées empiriquement va en s'amenuisant. Pour des débits moyens mensuels par exemple, il est à peu près certain que l'utilisation du modèle n'apporterait aucun bénéfice. Il ne faut donc pas considérer les modèles comme la panacée, et certains problèmes restent justiciables de méthodes plus simples.

24 – LA SIMULATION

24.1 – NECESSITE DE LA SIMULATION

Les seuls résultats que nous ayons pu obtenir par le calcul concernent les lois de probabilité marginale et conditionnelle des débits, ce qui est d'un intérêt pratique limité. En fait, ces lois nous ont servi avant tout à mettre au point le modèle en le comparant aux observations, et également à nous faire une idée grossière de la précision des résultats obtenus à partir du modèle établi sur de courtes séries d'observations.

Seul un procédé de simulation permet de résoudre la totalité des problèmes qui se posent à propos des débits étudiés, entre autres la recherche de distributions d'échantillonnage, comme nous l'avons indiqué.

Enfin, même si nous ne cherchons pas une grande fidélité du modèle aux observations à l'échelle de la journée, il est quand même important sur le plan pratique de simuler des débits journaliers, pour avoir une bonne estimation des débits par rapport à un niveau de besoin quelconque. L'emploi d'une simple moyenne mobile de 5 jours, comme nous l'avons fait pour les traitements analytiques, conduirait à une sous-estimation des risques de déficit.

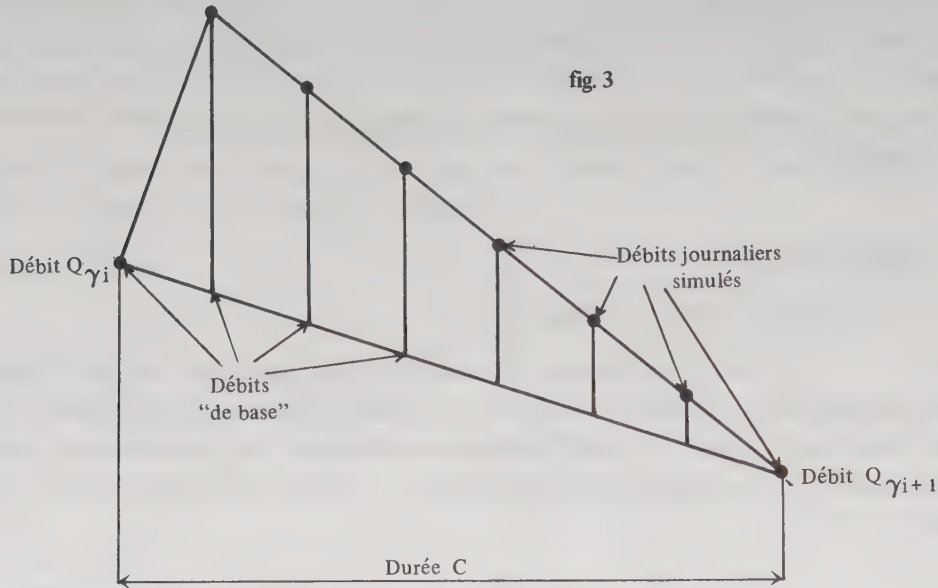
La simulation d'un modèle aléatoire peut se faire par la méthode dite de Monte-Carlo [34]. Schématiquement le procédé consiste, à partir d'un tirage de nombres au hasard, à générer des valeurs des variables aléatoires du modèle en respectant leurs lois de probabilité et autres conditions exigées par le modèle.

24.2 – SIMULATION SIMPLIFIEE

La génération d'une série de débits journaliers du 15 juin au 15 septembre peut s'effectuer selon le schéma suivant, sous réserve des modifications de détail qui pourront s'avérer utiles par la suite :

- génération d'une suite de réalisations de la variable "C" qui représente la durée d'une réaction. Dans les exemples étudiés, on peut estimer que la variable "C" suit une loi géométrique (proche de la loi exponentielle que nous avons utilisée au § 22) ;
- génération en chaîne de valeurs successives de y liées par la formule (6) :
 - . passage des valeurs de y aux valeurs de Q_γ
 - . génération de valeurs de W à partir de la loi conditionnelle W/Q_γ

— répartition conventionnelle des volumes W sur la durée de chaque réaction — Si on se désintéresse du problème des crues, on peut adopter par exemple une répartition triangulaire de W (fig. 3).



Nous obtenons ainsi une suite de débits journaliers qui reconstitue les débits réels, de façon évidemment assez grossière à l'échelle de 24 h mais de façon suffisamment approchée à l'échelle de quelques jours, ce qui est suffisant en matière d'étiage.

24.3 – SIMULATION ELABOREE

Si on veut obtenir d'un modèle de ce type des renseignements plus complets, concernant par exemple l'intensité maximum et le volume des crues, il est possible d'effectuer une simulation plus fine mais plus complexe.

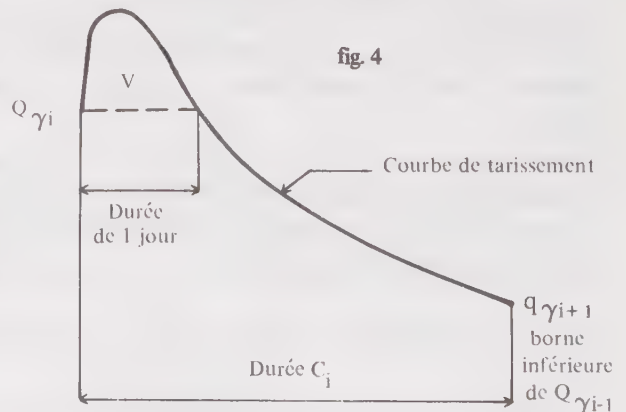
On peut se baser sur les remarques suivantes :

Tout d'abord il faut remarquer qu'une contrainte déterministe, que nous avons négligée, existe entre les valeurs successives de Q_{γ} . Il est impossible en effet que le débit décroisse plus rapidement qu'une certaine limite qui est la courbe de tarissement.

Ainsi étant donné pour une réaction le débit initial Q_{γ_i} et la durée c_i , il existera une limite inférieure $q_{\gamma_{i+1}}$ pour $Q_{\gamma_{i+1}}$.

Cette valeur inférieure sera obtenue comme il ressort de la figure ci-contre.

La génération des valeurs Q_{γ} devra être modifiée en conséquence. La loi de probabilité normale de y_{i+1} connaissant y_i sera remplacée par une loi peu différente de même moyenne et de même variance, mais possédant une borne inférieure, par exemple une loi de Pearson III.



On peut développer ensuite des segments de courbe de tarissement à partir des points γ simulés, et générer enfin pour chaque réaction le volume "V" analogue à celui de la fig. 4, ce qui est assez complexe car il faut tenir compte d'une liaison existant entre les variables C et V.

24.4 – UTILISATION DES DONNEES SIMULEES

Ayant généré des suites de débits journaliers, il est possible de les stocker sous forme de cartes perforées qui serviront à résoudre par la suite n'importe quel problème concernant la station et la période intéressées.

Cette façon de faire est sans doute la plus économique car une seule simulation suffira pour résoudre divers problèmes susceptibles de se présenter par la suite. D'autre part, ces problèmes pourront souvent être résolus par un ordinateur plus simple que celui qui est nécessaire pour la simulation.

Nous allons examiner maintenant successivement les deux opérations essentielles qui sont devenues possibles à la suite de cette simulation : la vérification de la validité du modèle et la résolution de problèmes pratiques.

25 – VERIFICATION DE LA VALIDITE DU MODELE

Il nous est maintenant possible de comparer les données empiriques avec les résultats du modèle, pour voir si celui-ci est fiable.

Les données empiriques sont présentées sous forme de moyennes calculées sur 18 périodes consécutives de 5 jours puisque nous ne nous intéressons pas (du moins provisoirement) à des échelles de temps plus fines. Les 28 ans de données fournissent donc 18 ensembles de 28 valeurs empiriques.

Nous avons effectué la comparaison des lois de probabilité des débits moyens de 5 jours, puis la comparaison des schémas de dépendance des débits moyens successifs.

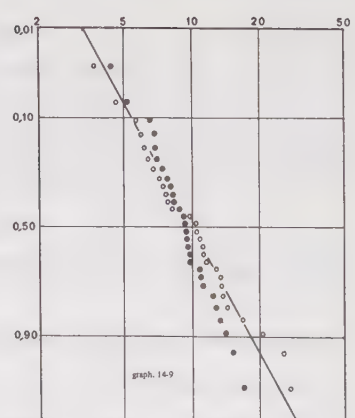
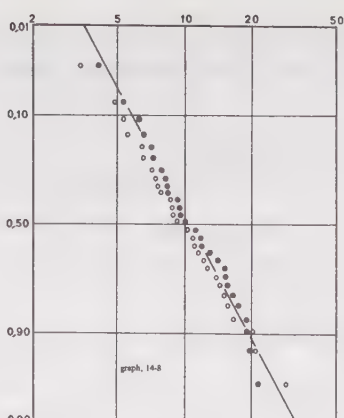
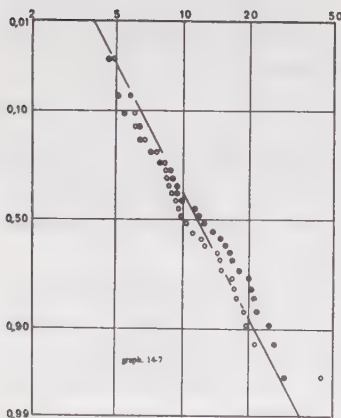
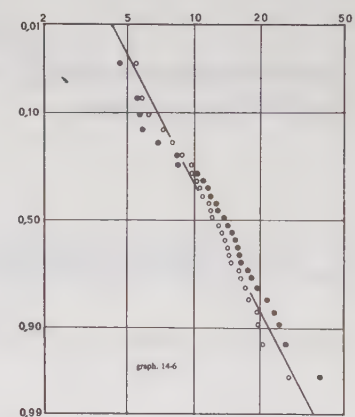
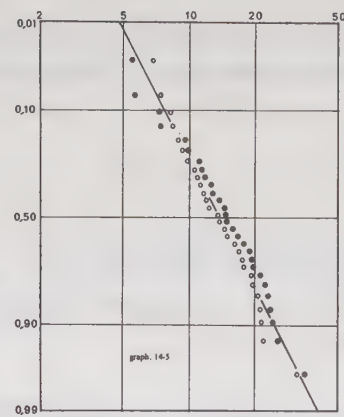
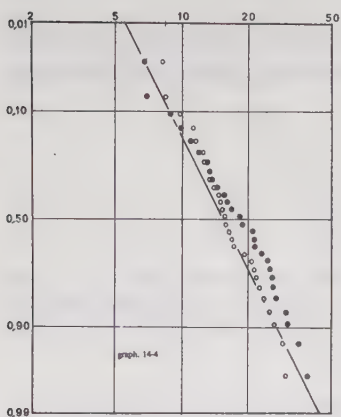
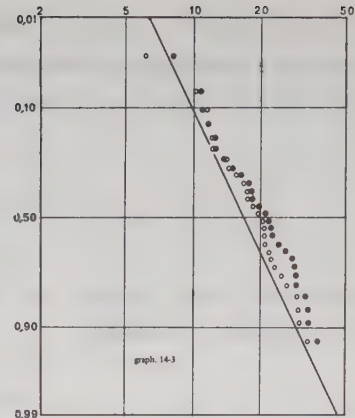
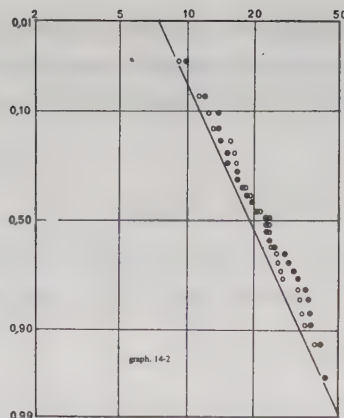
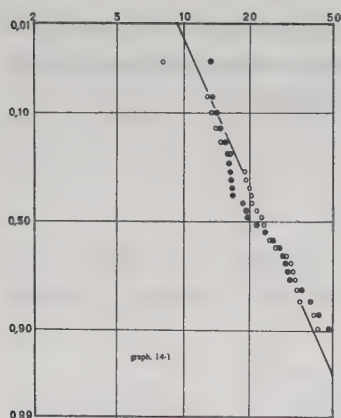
25.1 – COMPARAISON DES LOIS DE PROBABILITE

Nous allons comparer graphiquement les trois éléments suivants pour chacune des 18 périodes de 5 jours :

- courbe de répartition cumulée des 28 valeurs empiriques
- fonction de répartition log-normale proposée par le modèle (§ 22.6)
- courbe de répartition cumulée de 28 valeurs obtenues par simulation.

Nous avons adopté la graduation "gausso-logarithmique", ce qui conduit à représenter la fonction de répartition log-normale par une droite.

On constate sur le graph. 14 que l'adéquation du modèle aux observations est bonne, c'est-à-dire plus précisément que dans leur ensemble les répartitions empiriques ne manifestent pas de tendance générale différente des répartitions proposées par le modèle.



Graph. 14 :

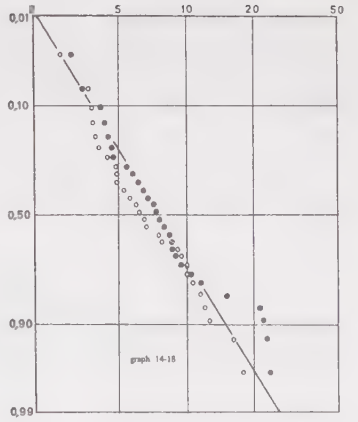
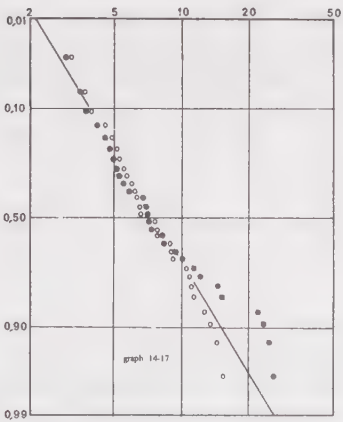
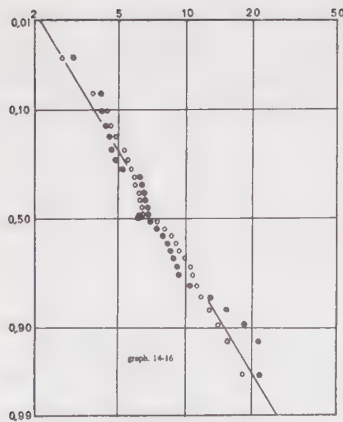
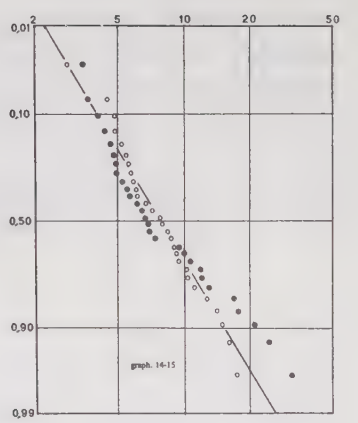
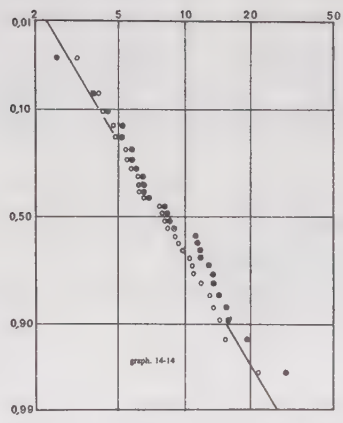
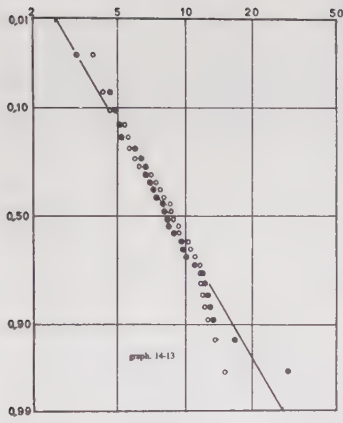
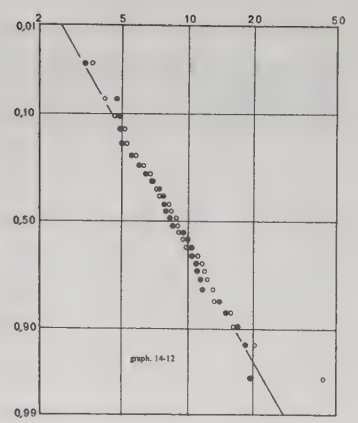
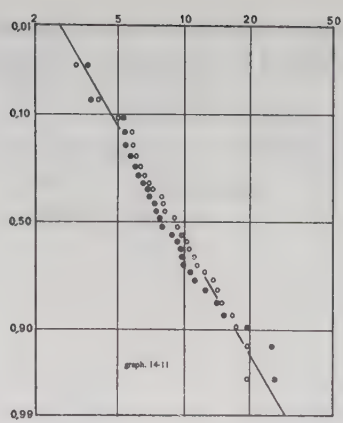
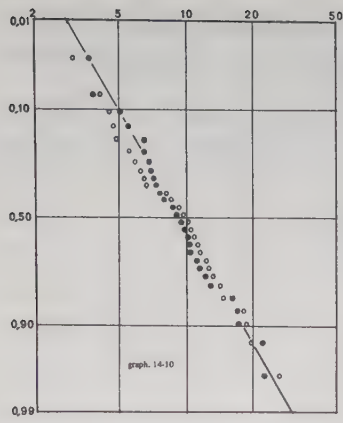
Comparaison entre :

- distributions empiriques des points observés (●)
- lois de probabilité obtenues à partir du modèle développé analytiquement (droites obliques des graphiques)
- distribution des points obtenus par simulation (○)

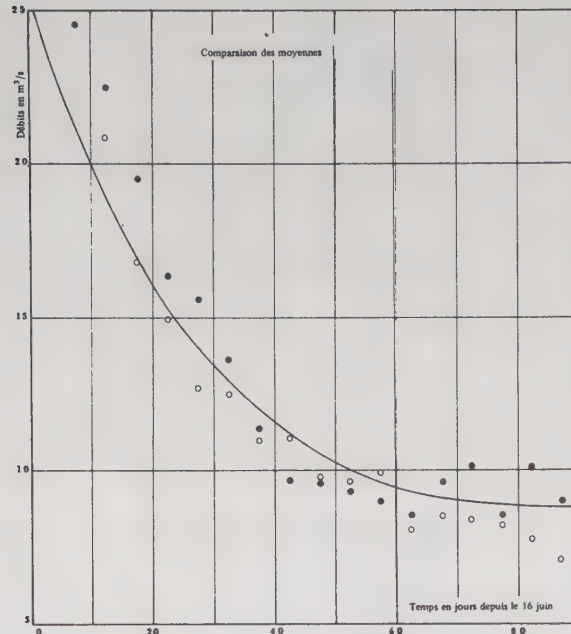
les différentes figures correspondent aux 18 périodes successives de 5 jours partant du 16 juin.

Abscisses : débits en m^3/s , échelle logarithmique

Coordonnées : probabilités cumulées, échelle de Gauss.



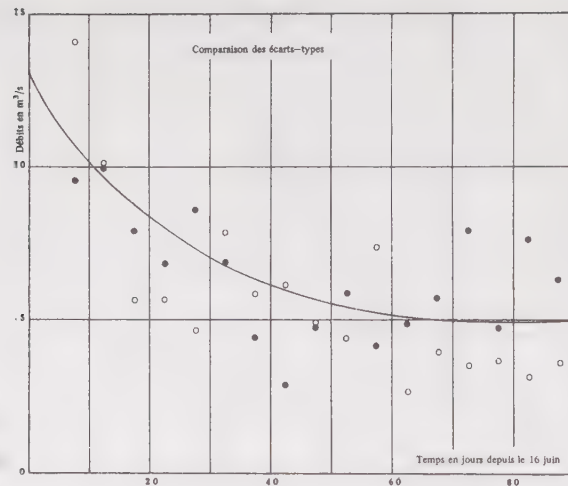
La comparaison peut être faite également sous une autre forme, qui fait l'objet des graph. 15 et 16. Nous y avons comparé les moyennes et écarts-types obtenus par les trois méthodes précédentes.



Graph. 15

Comparaisons entre :

- valeurs observées (●)
- courbes obtenues par traitement analytique du modèle
- valeurs simulées (○)



Graph. 16

Comparaisons entre :

- valeurs observées (●)
- courbes obtenues par traitement analytique du modèle
- valeurs simulées (○)

25.2 – COMPARAISON DES SCHEMAS DE DEPENDANCE INTERNE

Nous avons calculé sur la série de 28 ans d'observations et sur la série de 28 ans simulée le coefficient d'auto-corrélation R_1 des valeurs successives, puis le coefficient d'autocorrélation R_2 "au pas de 2" c'est-à-dire pour des valeurs séparées par une observation.

Les résultats sont les suivants :

	R_1	R_2
Débits observés	0,825	0,709
Débits simulés	0,866	0,763

Nous constatons tout d'abord que pour les deux séries $R_2 \neq R_1^2$, ce qui est conforme au caractère markovien du Processus.

Ensuite les résultats sont peu différents pour les deux séries, l'écart pouvant s'expliquer par le caractère trop rigide de la simulation des volumes W . D'ailleurs la différence s'estompe lorsqu'on passe à des échelles de temps supérieures à 5 jours. Ainsi pour les débits moyens de 10 jours nous trouvons comme valeurs de R_1 0,793 et 0,806, et pour les débits moyens de 15 jours 0,728 et 0,730.

En définitive, on peut estimer que le modèle est suffisamment fidèle aux observations.

26 – APPLICATIONS DU MODELE

Le modèle s'étant révélé fiable, il s'agit maintenant de voir par des exemples concrets ce qu'il est possible d'en tirer. Comme nous l'avons entrevu au § 12.2, il est possible de distinguer dans les applications les problèmes de prédétermination et les problèmes de prévision.

26.1 – PREDETERMINATION

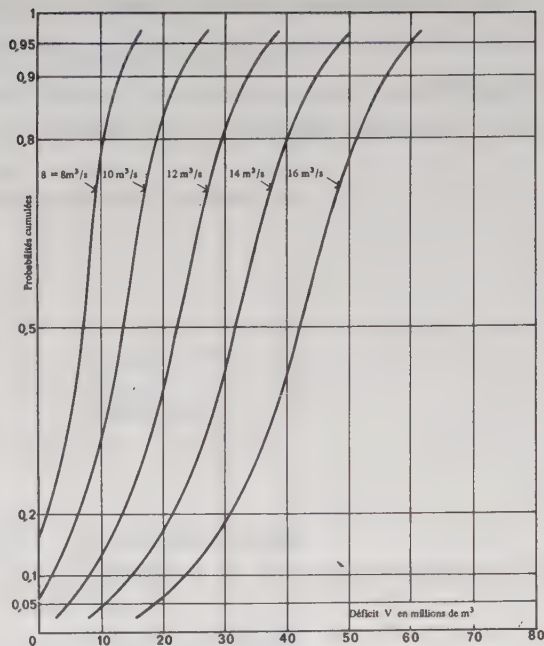
Il s'agit de la catégorie-type de problèmes qui se posent au projeteur qui cherche à déterminer les probabilités *a priori* de variables hydrologiques, nécessaires par exemple pour le dimensionnement d'ouvrages hydrauliques.

261.1 – PROBLEME DE RISQUE DE DEFICIT

Compte tenu de la définition que nous avons choisie pour les étiages (§ 11.1), et en supposant que nous nous intéressions aux déficits exprimés en volumes d'eau, le problème le plus simple que nous puissions nous poser consiste à déterminer la probabilité d'un déficit donné par rapport à un niveau de besoin donné, au niveau d'une station hydrométrique quelconque.

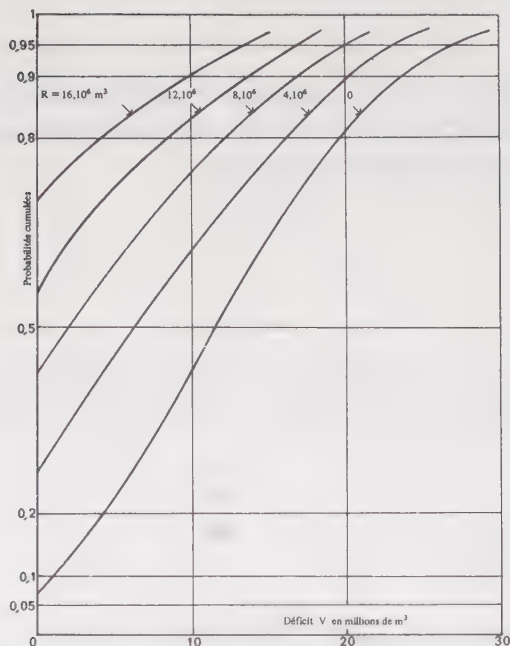
D'une façon plus générale, nous pouvons chercher à définir la loi de probabilité des déficits "V" pour différents niveaux de besoins "H". Nous avons appliqué ce problème à la station de Kercabanac, pour la période 15 juin - 15 septembre, ce qui nous donne le graph. 17. Ce résultat a pu être obtenu à partir d'une série générée de données de débits, exploitée sur ordinateur.

Ce diagramme synthétique permet d'apprécier les risques de déficit relatifs à différents niveaux de besoin pour un aménagement au fil de l'eau réalisé à partir d'un prélèvement à la station considérée. Le projeteur qui dispose de ce graphique est en mesure de choisir rationnellement l'importance du prélèvement qu'il effectuera à la station, et pourra décider éventuellement de façon objective l'intérêt qu'il peut y avoir à faire appel à des ressources complémentaires, compte tenu bien sûr des facteurs économiques et autres considérations non hydrologiques.



graph. 17

261.2 - INTERET DE RESERVES DE FAIBLE CAPACITE



graph. 18

Nous avons étudié de la même façon un problème voisin, et d'un intérêt pratique aussi évident. Supposons que le niveau des besoins soit fixé à $H = 10 \text{ m}^3/\text{s}$. Que devient la loi de probabilité du volume des déficits après réalisation de réserves de capacité totale "R", pour différentes valeurs de R ? Le graph. 18 répond à ce problème.

Le projeteur qui dispose d'un diagramme de ce type est en mesure d'apprécier l'intérêt éventuel qui pourrait résulter de la réalisation de réserves, et de choisir leur volume, compte tenu des facteurs autres qu'hydrologiques.

Précisons certains points relativement à ce problème. Tout d'abord nous avons parlé de retenues de "faible capacité". Il s'agit plus précisément de retenues suffisamment petites pour être remplies de façon quasi certaine au début de la période considérée, soit le 15 juin dans notre exemple d'application.

Pour déterminer l'influence de retenues de forte capacité, susceptibles d'assurer une régularisation annuelle ou interannuelle, il deviendrait nécessaire de connaître l'hydrologie de l'ensemble de l'année, mais en même temps la connaissance fine des débits de basses eaux perdrait son intérêt et nous tomberions dans le domaine d'application des modèles de débits mensuels et annuels.

Par ailleurs, pour traiter le problème nous avons dû choisir une règle de gestion pour les réserves considérées. Nous avons adopté le principe suivant : il s'agit simplement de chercher à diminuer le plus possible le volume total des déficits, indépendamment de toute autre considération sur ces déficits, ce qui conduit aux règles ci-dessous :

- dès qu'apparaît un déficit en eau, on le compense grâce à la réserve à concurrence du volume disponible dans celle-ci,
- dès qu'apparaît un surplus de débit, on l'utilise pour remplir la réserve à concurrence de la capacité maximale.

Cette règle de gestion un peu simpliste est donnée uniquement à titre d'exemple, et il est bien évident qu'on peut en imaginer une infinité d'autres plus complexes et qu'il est possible en particulier de comparer les mérites de diverses règles de gestion possibles pour résoudre un problème déterminé.

26.2 – PREVISION DES DEBITS

La méthode de simulation est applicable pour résoudre n'importe quel problème de prévision. Il suffit de partir d'un débit déterminé au lieu de partir d'un débit aléatoire comme dans le cas de la prédétermination, et les débits successifs se déduisent les uns des autres de la même façon en utilisant le même programme de simulation.

Il convient de faire à ce propos deux remarques importantes. Tout d'abord la génération étant basée sur les points " γ " (§ 22.1), il faut partir non pas du dernier débit observé, mais du dernier point γ observé, pour effectuer la prévision.

Ensuite le modèle ne permet la prévision que lorsqu'on se trouve déjà au cours de la période pour laquelle il a été établi. Pour faire des prévisions en partant d'une date antérieure, il existe d'autres méthodes, déjà largement utilisées [35].

27 – CONCLUSION

27.1 – CONCLUSION SUR L'INTERET DU MODELE

Les exemples d'application traités au § 26.1 montrent le parti qu'on peut tirer d'un modèle probabiliste de débits. Ces exemples ne sont évidemment pas limitatifs et on conçoit bien que l'on pourrait traiter de la même façon des problèmes beaucoup plus complexes. Il est possible ainsi de faire entrer l'hydrologie dans la *recherche opérationnelle appliquée aux aménagements hydrauliques*.

L'autre point essentiel, que nous avons développé au § 25, est que le modèle permet de tirer parti de courtes séries d'observations. En pratique il est donc possible d'établir dans un bref délai un projet en un point où n'existait pas auparavant de station limnimétrique.

27.2 – LIMITES D'UN MODELE DE DESCRIPTION DES SEULS DEBITS

La comparaison des ressources aux besoins, telle que nous l'avons effectuée dans nos exemples d'applications, suppose que les besoins sont déterminés et indépendants des ressources. Cette hypothèse est à peu près respectée pour les aménagements destinés à l'alimentation en eau potable, la production d'énergie, l'alimentation en eau industrielle. Il n'en va plus de même lorsqu'il s'agit notamment d'irrigation, car dans ce cas les besoins sont aléatoires et corrélés avec les ressources [1] [36].

Il apparaît donc indispensable pour cette application de faire intervenir dans les modèles la cause commune des besoins et des ressources : les précipitations. L'emploi d'un modèle ne prenant en compte que les débits conduirait à la sous-estimation des risques dans les projets.

D'autre part, comme nous l'avons analysé aux § 122.2 et 122.3, la qualité du modèle est fonction de l'information sur lequel il est basé, et on peut avoir le plus grand intérêt à utiliser des informations climatologiques de qualité et de longue durée pour améliorer la connaissance de débits pour lesquels on dispose d'une courte série d'observations, circonstance qui se présente fréquemment en pratique.

Ces deux raisons ont justifié la mise au point d'un modèle probabiliste pluies-débits dont nous allons parler dans le chapitre suivant.

3 – MODELE PLUIES-DEBITS

31 – INTRODUCTION

La conclusion du chapitre précédent fait ressortir la nécessité de concevoir des modèles hydrologiques prenant en compte les pluies.

Nous avons d'abord envisagé de développer notre modèle autorégressif de débits en faisant intervenir des corrélations pluies-débits. En fait, d'une part la structure du modèle n'aurait pas permis de choisir *a priori* une hypothèse rationnelle pour cette corrélation et il aurait fallu procéder à de nombreux tâtonnements purement empiriques. D'autre part il nous a paru impossible de contrôler de façon analytique une étude basée sur ce principe, ce qui aurait exigé dès le début le recours systématique à l'ordinateur, avec le retard considérable qui en aurait sans doute résulté.

Dans ces conditions nous avons préféré nous orienter vers une autre voie consistant à utiliser un modèle faisant intervenir des hypothèses de transformation des pluies en débits et permettant un contrôle analytique continu, particulièrement précieux dans la recherche des meilleures hypothèses, l'ordinateur ne devant intervenir qu'au stade de l'exploitation comme dans le modèle précédent.

Comme pour celui-ci la mise au point a été effectuée avec les débits moyens journaliers de la station de Kercabanac, sur le Salat, affluent de la Garonne [29] [30].

La période de l'année provisoirement retenue pour l'étude va du 15 juin au 15 septembre, mais comme nous le verrons il est vraisemblable que ce type de modèle pourrait s'appliquer à toute autre époque de l'année, en fonction d'autres besoins éventuels.

32.1 – DESCRIPTION

Le modèle est basé sur une synthèse des écoulements provenant des pluies en vue d'obtenir les débits, et se divise en deux étapes ou "sous-modèles".

Nous regroupons d'abord les pluies observées en épisodes pluvieux, suites de journées consécutives au cours desquelles on a pu mesurer une chute de pluie (fig. 5 a). Le plus souvent, une pluie d'épisode est efficace, c'est-à-dire qu'il lui correspond un écoulement (fig. 5 b). Pour simplifier nous ferons l'approximation que la partie de la pluie susceptible de s'écouler est pratiquement instantanée et survient au début de l'épisode pluvieux. Ce passage des pluies réelles aux écoulements élémentaires constitue le premier sous-modèle.

Deuxième sous-modèle : composition des écoulements élémentaires pour obtenir les débits de la rivière (fig. 5 c).

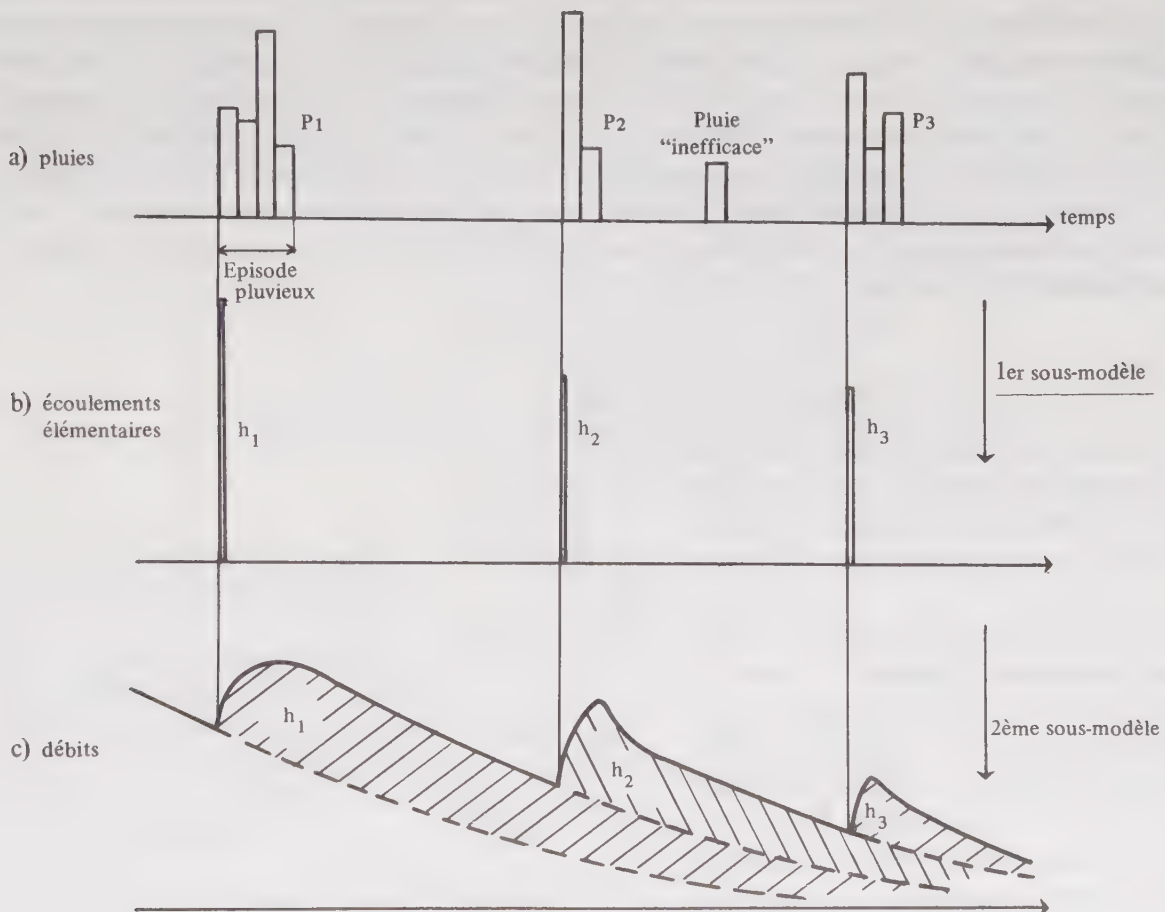


fig. 5

32.2 – SCHEMA DE LA MISE EN OEUVRE

En pratique, les opérations ne s'effectuent pas dans l'ordre où nous venons de les décrire. La mise en oeuvre du modèle comporte d'abord une phase préparatoire, consistant à découper sur la chronique des débits les écoulements totaux en écoulements élémentaires correspondant aux pluies efficaces (fig. 5 c) par prolongement des courbes de tarissement, ce qui permet d'estimer le volume de ces écoulements.

Il devient alors possible de mettre en oeuvre, dans un ordre indifférent, chacun des deux sous-modèles, dont l'articulation est constituée par les écoulements élémentaires précédemment déterminés.

Nous allons maintenant examiner successivement les différentes phases de l'étude.

33 – DETERMINATION DES ECOULEMENTS ELEMENTAIRES

33.1 – TRI DES PLUIES EFFICACES

Lorsqu'on observe une série de débits journaliers, on constate que généralement en l'absence de pluie la série décroît, et que les pluies d'une certaine importance se traduisent par une remontée des débits ou un palier. En fait, la confrontation des relevés de pluies de 24 h et de débits de 24 h à des stations voisines fait apparaître que certains des paliers ne sont vraisemblablement dus qu'à des blocages du limnigraphe. En effet, de tels paliers apparaissent en l'absence de toute pluie, ou tout au moins en l'absence de toute pluie ayant pu raisonnablement donner lieu à une réaction détectable sur des moyennes de 24 heures, la comparaison avec des pluies de caractéristiques voisines permettant de se faire une première opinion sur ce point. Des cas douteux subsistent après cette première analyse, mais concernent une faible proportion des pluies efficaces, et une proportion infime du total des volumes écoulés.

33.2 – DETERMINATION DES ECOULEMENTS ELEMENTAIRES

Après cette première sélection, nous regroupons les réactions de la rivière qui proviennent du même épisode pluvieux, puisque ce dernier constitue notre unité élémentaire de travail.

Nous pouvons alors individualiser les "écoulements élémentaires" provenant de chacun de ces épisodes pluvieux par le raisonnement suivant: l'écoulement h_1 étant intervenu, s'il n'y avait pas eu de pluies ultérieures les débits auraient décru suivant la courbe D_1 . L'écoulement h_2 étant intervenu, s'il n'y avait pas eu d'écoulements ultérieurs les débits auraient décru suivant la courbe D_2 , etc.

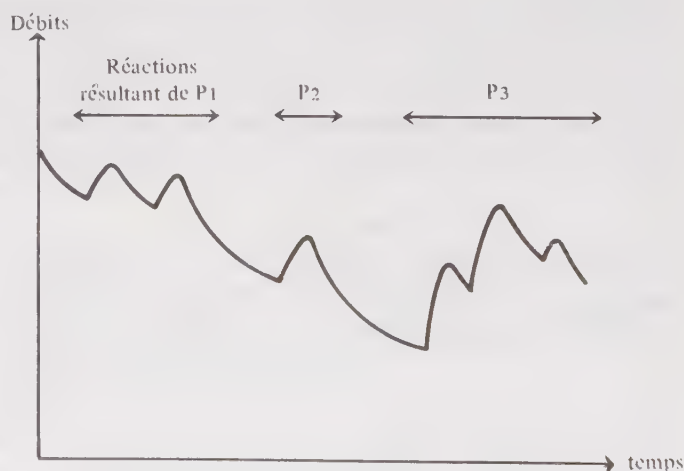


fig. 6

Par exemple, l'écoulement h_2 que l'on peut attribuer à P_2 est représenté par l'aire hachurée de la fig. 7.

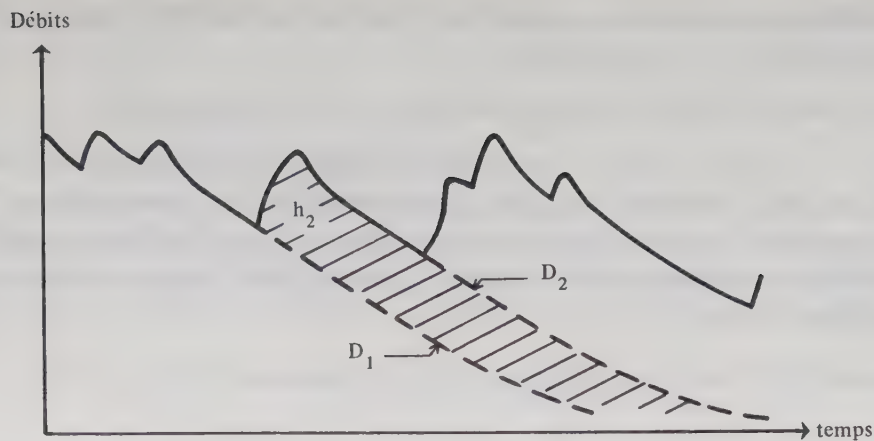


fig. 7

Un tracé vraisemblable pour les courbes D est obtenu par translation de parties réellement observées des courbes de tarissement :

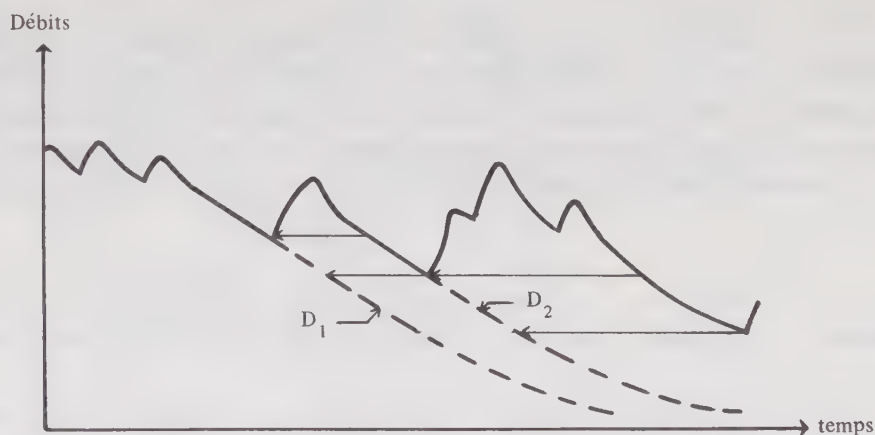


fig. 8

Nous ne pouvons évidemment pas extrapoler les courbes D pour la gamme des débits inférieurs au plus petit débit observé, mais cela est sans importance pour la détermination du volume h , qui de toutes façons, sera égal à $aq. + v$ (fig. 9) si on suppose les courbes D déduites les unes des autres par translation.

Nous avons ainsi constitué notre échantillon d'écoulements élémentaires qui constituent le pivot entre les deux sous-modèles dont nous allons maintenant décrire la mise au point.

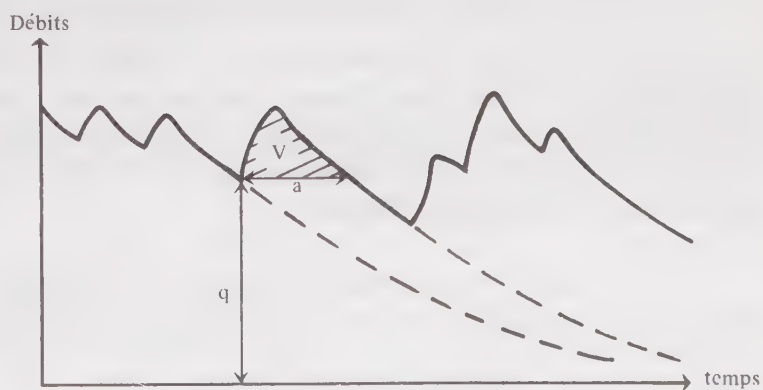


fig. 9

34.1 — ORGANISATION DES PHENOMENES CLIMATOLOGIQUES

Pour limiter la complexité du modèle et compte tenu de l'existence d'études basées sur ce principe [10] la période à laquelle on s'intéresse est divisée en "épisodes pluvieux" et "épisodes secs". Un épisode pluvieux "P" se définit comme la suite d'un ou plusieurs jours consécutifs durant lesquels on a observé une chute de pluie mesurable. Un épisode sec "S" se définit par la circonstance opposée. Nous obtenons donc le schéma suivant :

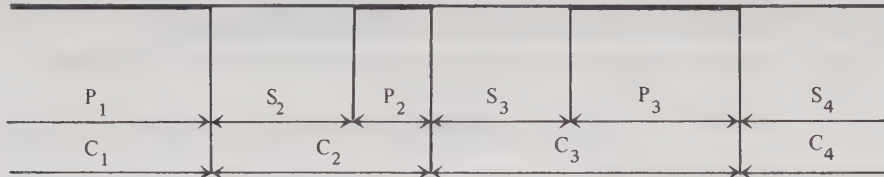


fig. 10

Supposons que la pluie tombée au cours de l'épisode P₁ ait donné lieu à un écoulement détectable sur une série de débits moyens de 24 h observés à une station hydrométrique proche. Nous faisons l'hypothèse que cela implique qu'à la date t₁, le sol est saturé. A partir de ce moment la réserve d'eau du sol diminue de la quantité prélevée par évapotranspiration, que l'on suppose égale à e₂ pour la durée du cycle C₂. Si la hauteur de pluie p₂ tombée durant P₂ est inférieure à e₂, il n'y a aucune réaction de la rivière.

Si p₂ > e₂, la hauteur d'eau p'₂ = p₂ - e₂, "pluie nette", donnera lieu à un écoulement élémentaire h qui viendra s'ajouter aux écoulements provenant des pluies antérieures.

Ce schéma est des plus simplistes mais nous ne saurions le compliquer sans perdre le contrôle analytique de l'opération (ce qui n'exclut pas la possibilité de faire intervenir des hypothèses plus raffinées lorsque le modèle sera au point avec les hypothèses actuelles).

34.2 — PASSAGE DES ELEMENTS CLIMATOLOGIQUES AUX ECOULEMENTS ELEMENTAIRES

En pratique nous ne connaissons pas les pluies moyennes tombées sur le bassin versant considéré et encore moins l'évapotranspiration moyenne. Comme nous allons le voir nous n'avons de ces grandeurs que quelques mesures ponctuelles, qui constituent des indices présentant une relation inconnue avec les valeurs moyennes sur le bassin. Nous ne pouvons donc pas utiliser immédiatement la notion de pluie nette déterminée au paragraphe précédent.

En première approche, nous allons définir en termes statistiques une liaison directe entre d'une part la pluie p et un indice d'évapotranspiration e', et d'autre part les écoulements élémentaires h, sous la forme de la régression linéaire suivante :

$$h = ap - be' + c + \epsilon \quad (7)$$

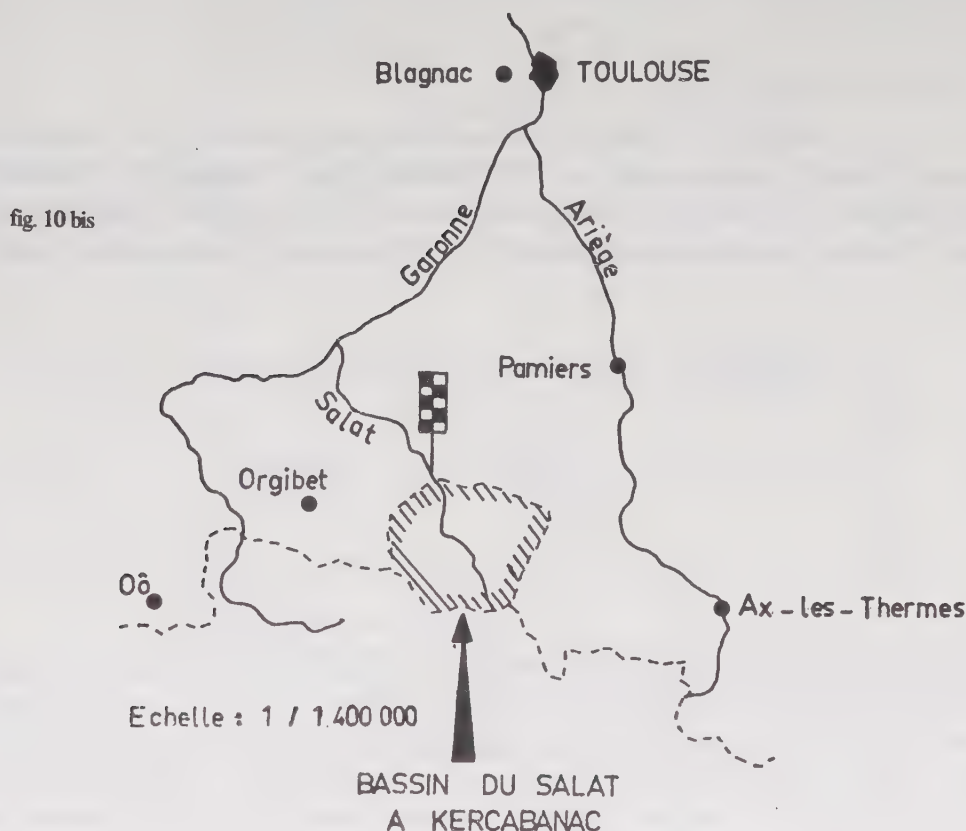
a, b, c étant les paramètres de la régression et ϵ un résidu aléatoire.

Il convient maintenant d'examiner plus en détail les éléments climatologiques pris en compte.

34.3 - DONNEES PLUVIOMETRIQUES

Les hauteurs pluviométriques utilisées résultent de la moyenne arithmétique des mesures effectuées à quatre stations : Ax-Les-Thermes, Pamiers, Orgibet, Oô qui entourent le bassin et ont été retenues après étude critique des résultats de mesure. Ces stations présentent une période d'observation commune de dix ans, de 1953 à 1962, que nous avons utilisée pour l'application du modèle.

La fig. 10 bis représente l'emplacement du bassin et des stations de mesure.



Ces stations sont à une altitude moyenne inférieure à celle du bassin et en sont assez éloignées. Elles ne peuvent donc que représenter un indice de la pluie moyenne, comme nous l'avons indiqué.

34.4 - L'EVAPOTRANSPIRATION

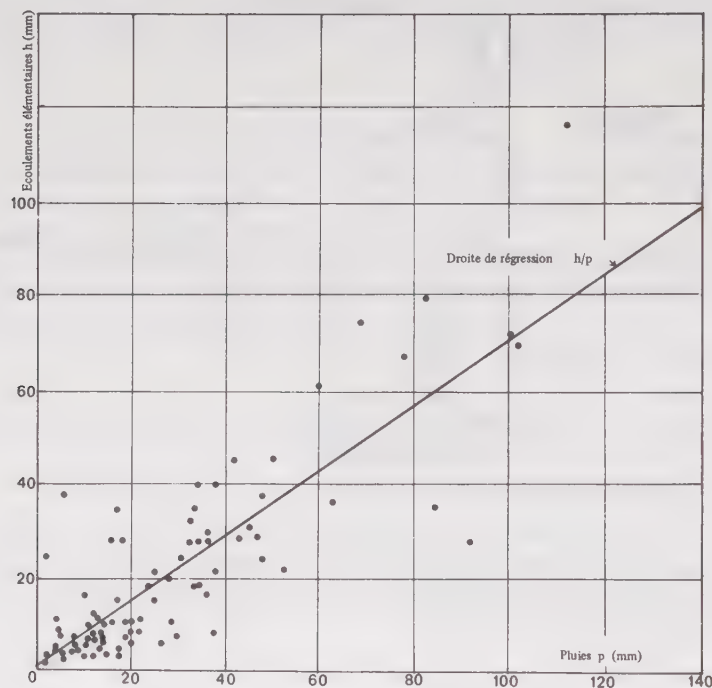
344.1 - CHOIX D'UN INDICE REPRESENTATIF

Nous avons cherché au départ à décrire l'évapotranspiration par une formule théorique, à savoir la formule de PENMAN qui prend en compte le maximum de facteurs climatologiques, et est certainement la plus valable à l'échelle journalière. Les données nécessaires ont été prises à la station

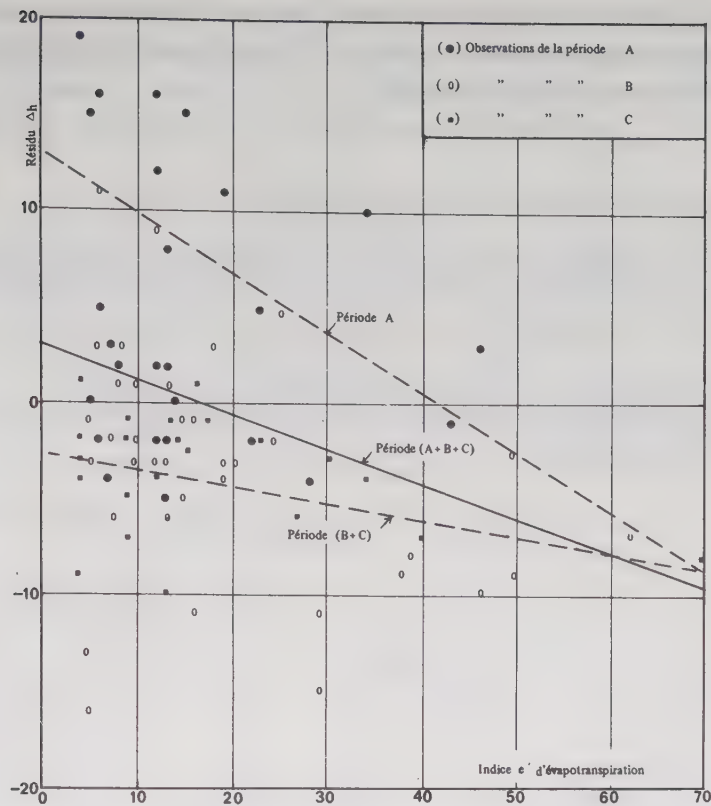
de Toulouse-Blagnac (voir situation sur la fig. 10 bis) à défaut d'une station plus proche. L'utilisation de la formule (7) dans ces conditions fait apparaître un coefficient de corrélation partiel de $-0,267$ entre h et e' , ce qui constitue un gain d'information extrêmement faible par rapport au coefficient $-0,241$ obtenu en remplaçant l'évapotranspiration par la durée de l'épisode sec correspondant. Dans ces conditions nous représentons l'ETP par la durée de cet épisode, d'une utilisation beaucoup plus pratique puisqu'elle ne fait intervenir que la chronique des pluies. Il est possible que pour d'autres applications la prise en compte d'une formule d'ETP soit rentable, par exemple dans le cas où la station météorologique utilisée serait très proche du bassin étudié. Cette façon de faire pourrait s'avérer utile dans le cas où le problème pratique essentiel serait d'améliorer la connaissance des débits par la connaissance des facteurs climatologiques, mais dans le cas où l'on voudrait générer des données sur ordinateur, la prise en compte de facteurs autres que la pluie, d'ailleurs plus ou moins corrélés à celle-ci, compliquerait singulièrement la simulation.

344.2 – E.T.P. & E.T.R.

En marge de l'essentiel de l'étude, nous avons cherché à mieux analyser le rôle respectif de la pluie p et de l'évapotranspiration e' (ETP PENMAN) dans la formation de l'écoulement élémentaire h . Pour cela nous avons décomposé la régression double (7) en deux étapes : régression de h par rapport à p (graph. 19) ce qui donne des écarts résiduels Δh , puis régression de Δh par rapport à e' (graph. 20).



graph. 19



graph. 20

Partageons la période de référence 15 juin - 15 septembre en trois périodes consécutives d'un mois A, B, C et représentons par un symbole différent sur le graph. 20 les points relatifs à chacune de ces périodes. Nous voyons une ségrégation très nette s'opérer entre les points de la période A et les autres. Les tests statistiques confirment que les droites de régression relatives à ces deux catégories de points sont significativement différentes. L'explication probable est que la différence entre ETR et ETP est plus élevée en fin d'été qu'au début, par suite du dessèchement du sol et de l'enlèvement des récoltes. La conclusion pratique de cette observation est que lorsque l'on dispose d'un échantillon suffisamment important, il n'est pas exclu qu'on ait intérêt à scinder la période estivale en deux parties faisant l'objet d'un traitement statistique séparé.

34.5 – UTILISATION DE LA NOTION DE PLUIE LIMITE

345.1 – INTERET DE LA NOTION DE PLUIE LIMITE

Nous avons vu § 27.2 qu'une des raisons qui justifient l'emploi d'un modèle pluies-débits repose sur la possibilité de tirer parti d'une longue série d'observations climatologiques pour améliorer la connaissance de débits dont on possède un échantillon réduit. En termes plus précis, supposons que nous ayons des observations de débits pendant une période T1 et des observations climatologiques pendant une période

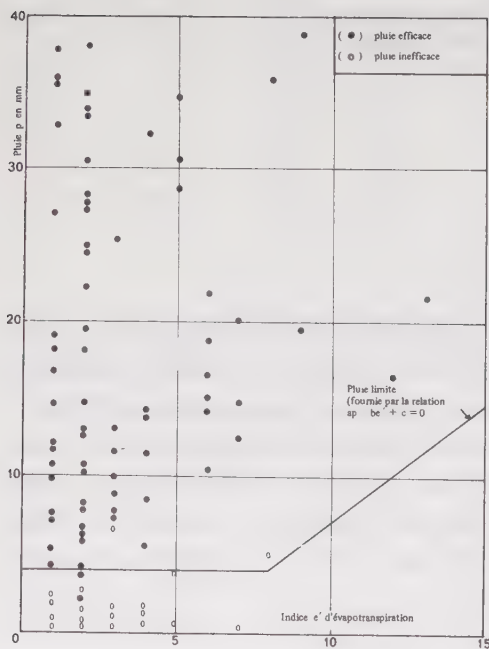
T1 + T2. La question qui se pose immédiatement est de déterminer quelles pluies de la période T2 seront vraisemblablement efficaces, en extrapolant ce qui s'observe à ce sujet pendant la période T1. Pour résoudre ce problème nous avons utilisé la notion de pluie limite [33].

345.2 – UTILISATION DE LA PLUIE LIMITE

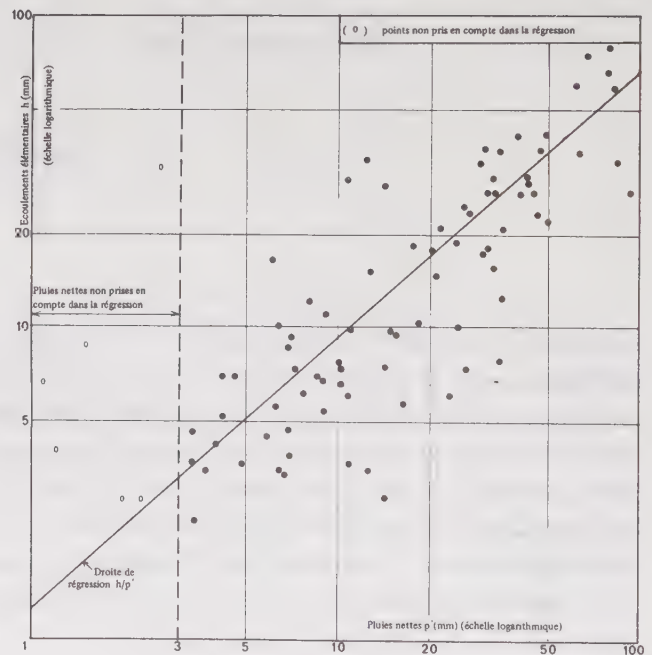
Considérons un système de coordonnées pluie-évapotranspiration (graph. 21). Reportons-y les points de coordonnées (p, e') observés durant la période T₁. Représentons par des symboles différents les pluies qui se sont avérées efficaces et celles qui n'ont donné lieu à aucun écoulement repérable sur la moyenne des débits journaliers. Chacune des catégories de points expérimentaux se regroupe bien et il est possible de partager le plan entre une zone des pluies efficaces et une zone des pluies inefficaces, avec un faible pourcentage de résultats erronés.

La formule (7) montre que théoriquement la limite devrait être fournie par la droite d'équation.

$$ap - be' + c = 0$$



graph. 21



graph. 22

Il apparaît que cette limite n'a rien d'in vraisemblable pour les valeurs de pluies relativement fortes, mais que pour les pluies les plus faibles il vaut mieux prendre une limite parallèle à l'axe des e' . Le graph. 21 représente le résultat obtenu à Karcabanac. Nous supposons que la limite obtenue serait utilisable pour une période complémentaire T_2 d'observations climatologiques.

Il apparaît que l'erreur introduite par l'adoption de cette limite est tout à fait négligeable, tant du point de vue du nombre des pluies aberrantes que de leur abondance, la limite parallèle à l'axe des e' étant évidemment choisie pour obtenir la meilleure compensation des erreurs par excès et par défaut.

Les opérations précédemment décrites sont certainement discutables, mais nous voyons difficilement comment échapper à la nécessité de trier d'une façon ou d'une autre les pluies présumées efficaces dans un ensemble de pluies qu'on ne peut confronter à une série de débits.

La courbe de pluie limite étant déterminée, nous remplaçons alors la pluie p et l'évapotranspiration e par la pluie nette p' : La relation (7) est alors remplacée par une équation du type :

$$h = ap' + b + \epsilon \quad (8)$$

Nous constatons que le coefficient de corrélation obtenu est identique au coefficient de corrélation double relatif à la formule (7).

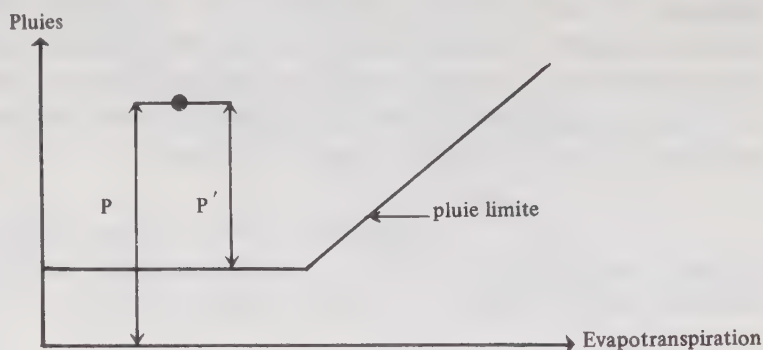


fig. 11

En fait, pour que la régression obtenue puisse faire l'objet de traitements statistiques, il est indispensable que les variables traitées soient proches de variables normales. En raison de la dissymétrie des lois de probabilité de h et p' , nous sommes amenés à considérer la régression :

$$\text{Log } h = a' \log (p') + b' + \epsilon \quad (9)$$

au lieu de la relation (8), le nouveau coefficient de corrélation étant de 0,856.

Sur le graph. 22 figure le nuage des points de coordonnées $(\log p', \log h)$.

Nous voyons que les observations relatives aux pluies nettes inférieures à 3 mm sont dans l'ensemble aberrantes, ce qui vient du fait que l'erreur relative importante qui les affecte se traduit en coordonnées logarithmiques par une forte erreur absolue. Dans ces conditions il semble raisonnable de ne pas tenir compte de ces observations pour l'estimation de la régression (9) ; elles ne représentent d'ailleurs que 1 % à 2 % du volume total des pluies efficaces.

Il convient ici de noter un point important concernant les opérations à effectuer sur les pluies p et les indices e' empiriques.

Lorsqu'une pluie de coordonnées (p_i, e'_i) s'avère inefficace (ou présumée telle), la pluie suivante se voit affecter les coordonnées $(p_i + p_{i+1}, e'_i + e'_{i+1})$. La principale conséquence est que toute pluie est prise en compte par le modèle, ne serait-ce qu'indirectement puisque toute pluie inefficace intervient dans le comportement d'une pluie efficace ultérieure.

345.4 – PLUIE NETTE ET PLUIE EFFICACE

Nous avons observé que le coefficient de corrélation trouvé pour la relation (9) reste pratiquement le même si, au lieu d'utiliser la pluie nette, nous prenons simplement la pluie totale. Dans ces conditions on peut se demander s'il est utile d'utiliser cette pluie nette. Pour l'estimation de la régression (9), nous avons dû ne pas tenir compte des pluies nettes inférieures à 3 mm, qui représentent une part négligeable de la totalité des pluies. Si nous remplaçons maintenant la pluie nette par la pluie totale dans la relation (9), nous serions obligés, de façon analogue, de ne pas tenir compte des pluies totales inférieures à 7 mm, qui représentent évidemment une part nettement plus importante des pluies que dans l'hypothèse précédente, que nous avons préférée pour cette raison.

Il se peut que dans d'autres exemples d'application il s'avère préférable d'utiliser la pluie totale plutôt que la pluie nette. Cependant même dans ce cas l'estimation de la pluie limite reste nécessaire, afin de sélectionner les pluies présumées efficaces.

34.6 – AMELIORATION POSSIBLES DE LA DEFINITION DU TRANSFERT PLUIES-DEBITS

Les hypothèses que nous avons adoptées pour décrire le passage des pluies aux débits sont évidemment très simplistes, en ce qui concerne notamment la prise en considération de l'évapotranspiration. D'ailleurs de nombreux auteurs se penchent depuis longtemps sur ce problème qui relève plus de la physique déterministe que de la statistique. Il est possible que dans l'avenir nous tenions compte de ces travaux pour améliorer le modèle.

Cependant il est nécessaire de faire des réserves à ce sujet. D'une part comme nous l'avons vu au § 343.1, la prise en compte d'autres facteurs que la pluie complique énormément la simulation du modèle. D'autre part, les mesures climatologiques forcément ponctuelles représentent plus ou moins mal des grandeurs physiques intéressant l'ensemble du bassin. Enfin les données climatologiques autres que pluviométriques sont fournies par un réseau de stations relativement lâche.

35 – DEUXIEME SOUS-MODELE : COMPOSITION DES ECOULEMENTS ELEMENTAIRES

Après avoir proposé une relation entre pluies réelles et écoulements élémentaires, il convient maintenant de voir de quelle façon on peut composer ces derniers pour obtenir les débits.

(D'après une conférence tenue par M. J. BERNIER, ingénieur du Centre d'Etudes et de Recherches Nucléaires, Thermiques et Hydrauliques d'EDF, en 1968).

351.1 – PRINCIPE

Considérons une échelle de temps "t" et une échelle de débits "q". Nous supposons qu'une pluie survient à un instant " τ ", et qu'elle est suffisamment brève pour pouvoir être considérée comme instantanée. Tout ou partie de cette pluie est destiné à retourner dans l'atmosphère par évapotranspiration. Si la pluie est "efficace" une partie s'écoulera en surface ou par l'intermédiaire des réservoirs souterrains, et constituera l'écoulement élémentaire auquel nous allons maintenant nous intéresser exclusivement.

Nous supposons qu'un écoulement élémentaire d'abondance unitaire résultant de la pluie survenue à l'instant τ se transforme en une suite de débits qui suit une loi $K(t - \tau)$, fonction de transfert que nous supposons unique et linéaire.

Notons au passage que cette fonction de transfert n'est pas l' "hydrogramme unitaire" classique, lequel n'intéresse que l'écoulement par ruissellement superficiel.

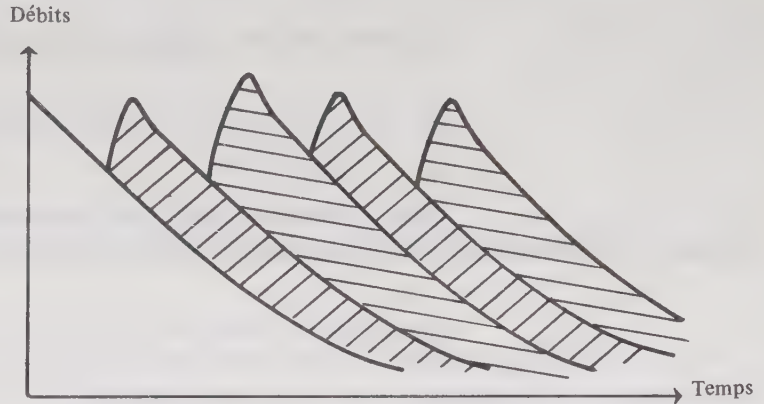


fig. 12

Les écoulements élémentaires résultant des pluies successives se superposent pour donner l'écoulement résultant, selon la fig. 12.

Appelons $p(\tau)$ le processus des écoulements élémentaires. Nous supposons qu'il s'agit d'un processus poissonien, c'est-à-dire d'une suite d'événements instantanés tels que notamment la probabilité d'apparition d'un événement dans un intervalle de temps Δ quelconque soit proportionnelle à cet intervalle ; soit $\lambda \Delta$ cette probabilité. Chaque écoulement élémentaire est supposé indépendant des précédents et des intervalles de temps qui les séparent. Ce processus pris à un instant donné ignore donc tout ce qui s'est passé auparavant ; il sera dit "markovien" [31].

Considérons maintenant $Q(t)$, débit à l'instant t , variable aléatoire résultant de la superposition des écoulements élémentaires précédant l'instant t . Nous pouvons écrire :

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t K(t - \tau) p(\tau) d\tau \quad (10)$$

351.2 – RECHERCHE DE LA LOI DE PROBABILITE DU DEBIT INSTANTANE

Soit $g(h)$ la densité de probabilité de l'abondance h de l'écoulement élémentaire et $g_h^*(s)$ sa transformée de Laplace.

Nous allons chercher la transformée de l'expression (10).

Dans un intervalle de temps infiniment petit $d\tau$, l'évènement "pluie efficace" auquel s'attache la probabilité $\lambda d\tau$ entraîne $p(\tau) = h$ et par conséquent $p_{\tau}^*(s) = g_h^*(s)$.

Dans le même intervalle de temps, l'évènement "absence de pluie efficace" auquel s'attache la probabilité $(1 - \lambda d\tau)$ entraîne $p(\tau) = 0$ et $p_{\tau}^*(s) = 1$.

En pondérant ces deux éventualités par leurs probabilités respectives, nous obtenons donc la transformée de $p(\tau)$.

$$p_{\tau}^*(s) = 1 - \lambda d\tau + \lambda d\tau g_h^*(s)$$

La transformée du produit $K(t - \tau) p(\tau)$ s'écrit alors :

$$1 - \lambda \left\{ 1 - g^*[s \cdot K(t - \tau)] \right\} d\tau \quad (11)$$

La transformée de Laplace de l'expression (10) est donc un produit infini de termes tels que (11) et le logarithme de cette transformée est une somme infinie de la forme :

$$\log \varphi_q(s) = \sum \log \left(1 - \lambda \left\{ 1 - g^*[s \cdot K(t - \tau)] \right\} d\tau \right)$$

ce qui devient, à un infiniment petit du second ordre près :

$$\log \varphi_q(s) = \sum \left(\lambda \left\{ g^*[s \cdot K(t - \tau)] - 1 \right\} d\tau \right)$$

et en revenant à l'écriture intégrale :

$$\log \varphi_q(s) = \lambda \int_{-\infty}^t \left\{ g^*[s \cdot K(t - \tau)] - 1 \right\} d\tau \quad (12)$$

Si nous développons maintenant g^* suivant les moments m_1, m_2 , etc. de la loi de probabilité $g(h)$, l'expression (12) donne le développement suivant :

$$\log \varphi_q(s) = \lambda m_1 s \int_{-\infty}^t K(t - \tau) d\tau - \frac{\lambda m_2 s^2}{2!} \int_{-\infty}^t K^2(t - \tau) d\tau + \dots \text{etc.}$$

ce qui fournit immédiatement les premiers moments de $Q(t)$, notamment :

$$E(Q) = \lambda m_1 \int_{-\infty}^t K(t - \tau) d\tau \quad (13)$$

$$\text{Var}(Q) = \lambda m_2 \int_{-\infty}^t K^2(t - \tau) d\tau \quad (14)$$

Nous pouvons ainsi approcher la loi de probabilité cherchée par ses moments.

351.3 – DEFINITION DE LA FONCTIONNELLE CARACTERISTIQUE

Nous allons maintenant définir un outil mathématique susceptible de fournir d'autres résultats probabilistes, concernant en particulier les volumes écoulés dans un intervalle de temps donné.

La transformée de Laplace du débit $Q(t)$ peut s'écrire ainsi :

$$\varphi_Q(s) = E [e^{-s \cdot Q(t)}]$$

Posons maintenant que s est une fonction quelconque de t , non nécessairement continue, et écrivons :

$$\varphi_Q [s(t)] = E [e^{-\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot Q(t) dt}] \quad (15)$$

expression que nous appellerons "fonctionnelle caractéristique".

$$\text{Si nous définissons } s(t) \text{ par } \begin{cases} s = s_0 & \text{pour } t = t_0 \\ s = 0 & \text{pour } t \neq t_0 \end{cases}$$

l'expression (15) redevient la transformée de Laplace classique, dont la fonctionnelle caractéristique apparaît ainsi comme une généralisation.

Un autre cas particulier intéressant est obtenu en définissant $s(t)$ par

$$\begin{cases} s = s_1 & \text{pour } t = t_1 \\ s = s_2 & \text{pour } t = t_2 \\ s = 0 & \text{pour } t \neq t_1 \text{ et } t \neq t_2 \end{cases}$$

l'expression (15) devient dans ces conditions :

$$\varphi_Q [s(t)] = E [e^{-s_1 \cdot Q(t_1) - s_2 \cdot Q(t_2)}]$$

qui est la transformée de Laplace du couple de variables aléatoires $Q(t_1)$, $Q(t_2)$, permettant par exemple de déterminer des lois conditionnelles de débits.

351.4 – RECHERCHE DE LA LOI DES VOLUMES ECOULES

Prenons pour $f(t)$ la fonction en "créneau" définie par

$$\begin{cases} s = 1 & \text{pour } t \in [0, t_f] \\ s = 0 & \text{pour } t \notin [0, t_f] \end{cases}$$

L'expression (15) devient

$$\varphi_Q [s(t)] = E [e^{-s \int_0^{t_f} Q(t) dt}] = E [e^{-sV}] \quad (16)$$

en appelant V le volume écoulé entre les instants 0 et t_f .

Nous pouvons ainsi obtenir la loi marginale du volume écoulé entre les instants 0 et t_f , ou du moins les premiers moments de cette loi.

De même nous aurions pu prendre pour $s(t)$

$$\begin{aligned} s &= s_0 \text{ pour } t = 0 \\ s &= s_1 \text{ pour } t \in [t_i, t_f] \\ s &= 0 \text{ pour } t \neq 0 \text{ et } t \notin [t_i, t_f] \end{aligned}$$

et en déduire la loi conditionnelle du volume entre les instants t_i et t_f connaissant le débit à l'instant 0. De la même façon $s(t)$ formée de deux créneaux permettrait d'obtenir la loi conditionnelle d'un volume écoulé connaissant un volume antérieur. Ces exemples ne sont évidemment pas limitatifs des possibilités d'application de la fonctionnelle caractéristique.

Nous allons maintenant développer le calcul des premiers moments de la loi marginale du volume V écoulé entre les instants 0 et t_f :

$$V = \int_0^{t_f} Q(t) dt = \int_0^{t_f} dt \int_{-\infty}^t K(t-\tau) p(\tau) d\tau$$

Le domaine d'intégration sera celui de la fig. 13.

Nous allons décomposer le volume V en un volume V_1 correspondant au domaine rectangulaire D_1 , et un volume V_2 correspondant au domaine triangulaire D_2

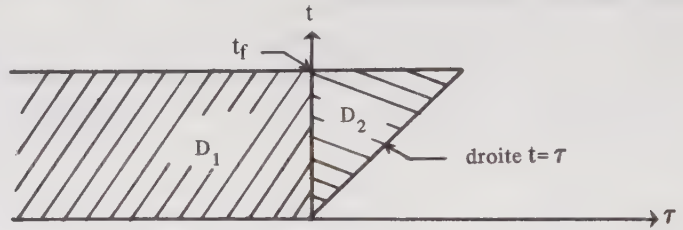


fig. 13

Nous avons d'abord
$$V_1 = \int_{-\infty}^0 p(\tau) d\tau \int_0^{t_f} K(t-\tau) dt \quad (17)$$

Posons alors
$$M_1(\tau) = \int_0^{t_f} K(t-\tau) dt$$

ce qui donne à V_1 une forme analogue à (10). La suite du calcul est donc identique à celle du § 351.2.

L'autre volume partiel s'écrit
$$V_2 = \int_0^{t_f} p(\tau) d\tau \int_{\tau}^{t_f} K(t-\tau) dt \quad (18)$$

Posons comme précédemment
$$M_2(\tau) = \int_{\tau}^{t_f} K(t-\tau) dt$$

ce qui conduit au même type de calcul.

Nous pouvons ainsi en déduire les premiers moments de V_1 et V_2 , et par conséquent de V . Les volumes V_1 et V_2 sont d'ailleurs indépendants comme il apparaît clairement dans l'interprétation graphique suivante. L'examen des bornes d'intégration des formules (17) et (18) montre que V_1 s'interprète comme le volume résultant des pluies survenues dans l'intervalle $(0, t_f)$, ce que l'on peut traduire par la fig. 14.

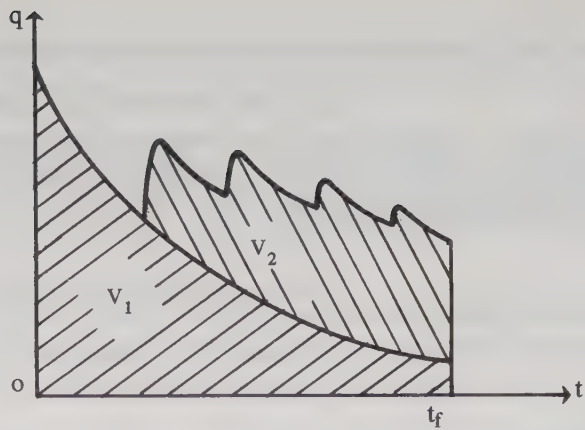


fig. 14

35.2 – ELEMENTS NECESSAIRES A LA MISE EN OEUVRE DU SOUS-MODELE ELEMENTAIRE

L'application du sous-modèle décrit au paragraphe précédent exige l'estimation des éléments suivants :

- paramètre λ , qui règle la probabilité d'apparition des pluies efficaces,
- loi de probabilité $g(h)$ des écoulements élémentaires,
- fonction de transfert $K(t - \tau)$.

352.1 – LE PARAMETRE λ

Nous avons supposé que le paramètre λ était constant en fonction du temps t . Il pourra s'avérer nécessaire dans d'autres applications de tenir compte d'une variation systématique de λ . Cela ne soulève aucune difficulté ni dans le traitement mathématique du modèle, ni dans la simulation. L'essentiel est que le processus des instants d'apparition des pluies efficaces puisse se ramener par changement d'échelle de temps au processus élémentaire de Poisson [31].

Dans notre hypothèse, λ est l'inverse de l'intervalle de temps moyen séparant deux pluies efficaces successives et se déduit donc immédiatement des observations.

352.2 – LES MOMENTS DE LA LOI DE "h"

Il est nécessaire de passer des moments de la loi de $\log h$, supposée normale, aux moments de la loi lognormale de h .

Appelons μ et σ^2 la moyenne et la variance de $\log h$ (pour une valeur donnée de t) et m_1 et m_2 la moyenne et le moment du second ordre de h , qui sont nécessaires pour le traitement mathématique du modèle. m_1 et m_2 s'obtiendront par les relations suivantes [31].

$$\begin{aligned} m_1 &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ m_2 &= e^{2\mu + 2\sigma^2} \end{aligned} \quad (19)$$

La mise en oeuvre du sous-modèle exige le choix d'une fonction de transfert déterminant la transformation d'un écoulement élémentaire issu d'une pluie supposée instantanée, en une suite de débits étalés dans le temps. Cette fonction de transfert peut se définir comme la loi des débits résultant de l'écoulement élémentaire unité.

Nous avons choisi la fonction de transfert suivante :

$$p(t-\tau) = a \cdot e^{-a(t-\tau)} \quad (20)$$

dans laquelle τ est l'instant auquel tombe une pluie efficace, t l'instant auquel on mesure un débit résultant de l'écoulement élémentaire correspondant, et a un paramètre dont nous exposerons l'estimation dans un paragraphe ultérieur. Nous avons jugé suffisant d'adopter une fonction de transfert assez grossière car les fonctions de transfert réellement observables pour un épisode pluvieux donné ont une forme extrêmement variable. La prise en compte d'une fonction de transfert plus raffinée ne se justifierait éventuellement qu'en tenant compte au moins des deux conditions suivantes : observation de pluies et débits à l'échelle horaire, analyse fine du comportement de la pluie au cours d'un épisode pluvieux. De toutes façons il faut bien voir que dans sa forme actuelle le modèle exige le recours à une fonction de transfert unique pour toutes les pluies efficaces, ce qui ne correspond pas à la réalité.

En outre l'étude des débits à une échelle très fine de l'ordre de la journée (ou moins) ne présente guère d'intérêt pratique en dehors du problème des crues, que nous estimons hors de portée de notre modèle dans l'immédiat. Celui-ci doit permettre des prévisions valables à une échelle de l'ordre de $\frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire 5 à 10 jours, ce qui semble pratiquement suffisant, et ce que confirme la suite de l'étude.

35.3 – MISE EN OEUVRE D'UN SOUS-MODELE MODIFIE

Le modèle dont la structure mathématique est exposée au § 35.1 se révèle inapplicable tel quel dans la pratique. Il s'est avéré nécessaire, à l'expérience, d'introduire un certain nombre de complications successives que nous allons examiner en détail.

353.1 – LA PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS INITIALES

Le modèle schématique du § 35.1 prend en compte toutes les pluies efficaces antérieures à l'instant auquel on se place, et ceci de façon illimitée dans le temps.

En d'autres termes les volumes écoulés entre deux instants t et $t + \Delta$ se décomposent de la façon qui apparaît sur la fig. 15.

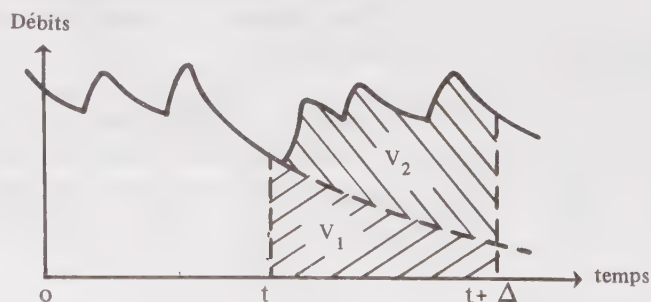


fig. 15

Cette façon de faire revient à supposer que ce qui s'observe après l'instant 0 est extrapolable antérieurement à cet instant de façon illimitée. Cette hypothèse est évidemment physiquement

fausse et s'est révélée inapplicable dans les cas où nous l'avons tentée (ce qui n'exclut pas que dans d'autres exemples elle approche la réalité avec une précision suffisante).

Il apparaît nécessaire dans ces conditions de se fixer la moyenne et la variance du débit q_0 à l'instant 0. En fait, compte tenu de la grossièreté relative au modèle, il suffira de prendre le débit moyen de 5 jours autour de la date 0.

Si nous établissons le modèle à partir de 5 à 10 ans d'observations par exemple, nous n'aurons que 5 à 10 observations de q_0 , ce qui est très insuffisant pour une estimation correcte de m_0 et surtout s_0^2 , d'où la nécessité de recourir à un modèle de débits pour cette estimation.

Nous avons donc utilisé pour cette estimation notre modèle autorégressif de débits, ce qui présente évidemment une sujétion sur laquelle nous reviendrons par la suite.

353.2 - LES PARAMETRES a et a_0

Dans le cadre des hypothèses du § 35.1, avec fonction de transfert de forme exponentielle (20) et de paramètre a , le débit devrait toujours décroître suivant une fonction exponentielle de paramètre a en l'absence de pluies, et en particulier en cas d'absence de pluie à l'instant zéro, le débit

devrait décroître à partir de cet instant selon la fonction : $q = q_0 \cdot e^{-at}$

A l'expérience il s'avère nécessaire d'utiliser deux paramètres différents a_0 et a , a étant le paramètre de la fonction de transfert, et a_0 le paramètre qui caractérise la décroissance que subirait le débit à partir de l'instant zéro dans l'hypothèse d'absence de pluie (fig. 16).

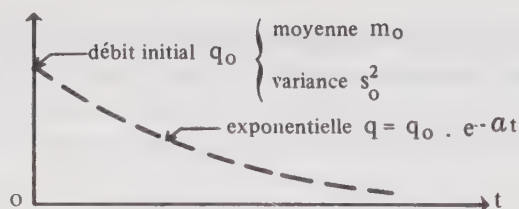


fig. 16

L'estimation statistique de a_0 et a sera exposée dans un prochain paragraphe.

La nécessité de distinguer ces deux paramètres provient de ce qu'ils n'ont pas la même signification. En effet, l'exponentielle de paramètre a_0 est une courbe de tarissement et la valeur trouvée pour ce paramètre, soit $a_0 = 0,037$ est cohérente vis à vis des valeurs observées pratiquement, soit 0,07 au-dessus de 5 m³/s et 0,01 au-dessous, l'estimation 0,037 constituant en quelque sorte un compromis entre ces valeurs extrêmes.

Le fait de trouver pour a une valeur plus faible que les valeurs généralement observées pour les courbes de tarissement résulte de ce que nous avons regroupé souvent plusieurs pointes de crues en un seul écoulement élémentaire correspondant à une période pluvieuse. La fig. 17 fait apparaître schématiquement que l'on doit trouver dans ces conditions une valeur de a plus faible que celles que l'on peut mesurer sur les courbes de tarissement.

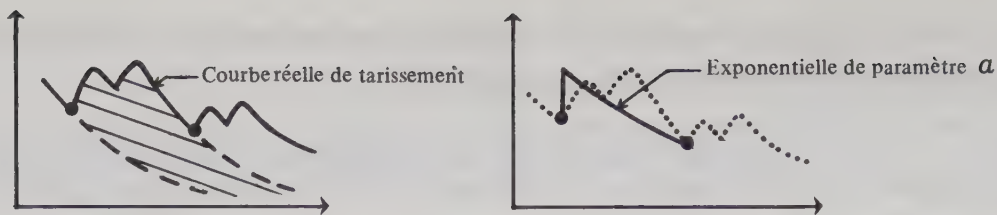


fig. 17

Il est intéressant d'observer que la valeur retenue pour a est du même ordre de grandeur que la valeur observée pour la courbe de tarissement réelle lors des étiages les plus sévères. Dans ces conditions le modèle semble être un bon estimateur des étiages exceptionnels, ce qui résulte peut-être d'une coïncidence qu'on pourrait ne pas observer dans d'autres exemples.

353.3 – NON STATIONNARITE DU PROCESSUS

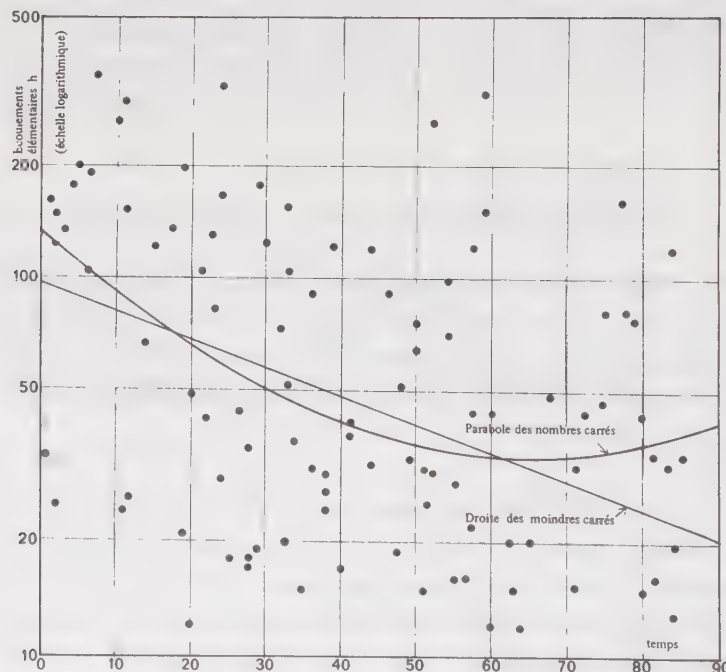
Il s'avère que le processus des écoulements élémentaires n'est pas stationnaire dans le temps. En termes hydrologiques cela signifie que le rendement moyen des pluies n'est pas stationnaire au cours de l'année. Pour la période considérée (15 juin – 15 septembre), après divers tâtonnements nous avons choisi de considérer que $\log(h)$ présente une tendance générale parabolique et une variance constante, ce que traduisent les équations suivantes :

$$E(\log h) = \mu = At^2 + Bt + C \quad (21)$$

$$\text{Var}(\log h) = \sigma^2 \quad (22)$$

(21) étant estimée par la parabole des moindres carrés des observations de $\log h$, et (22) étant la variance résiduelle des observations par rapport à cette courbe de régression (graph. 23). Sur ce graphique figure également la droite des moindres carrés qui conduit à une mauvaise adéquation du modèle. Pour la suite des calculs il faut évidemment remplacer dans (19) μ par sa valeur donnée par (21).

graph. 23



35.4 – VERIFICATION DE L'ADEQUATION DU MODELE

354.1 – LOI DE PROBABILITE DES VOLUMES ECOULES

En tenant compte des complications que nous venons d'évoquer, il est possible de calculer la loi de probabilité des volumes écoulés. Cette loi, si elle est d'un intérêt pratique réduit, est essentiellement destinée à permettre la confrontation du modèle avec les données réelles, comme dans le cas de notre modèle autorégressif de débits.

Le découpage du volume V de la fig. 12 doit être modifié par la prise en compte des conditions initiales. Il y aura décomposition en trois volumes partiels V_0 , V_1 , V_2 . V_0 résulte du débit initial, V_1 des pluies survenues entre les instants 0 et t , V_2 des pluies survenues entre les instants t et $t + \Delta$ (fig. 18).

Les volumes partiels étant indépendants, nous aurons :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(V) = E(V_0) + E(V_1) + E(V_2) \\ \text{Var}(V) = \text{Var}(V_0) + \text{Var}(V_1) + \text{Var}(V_2) \end{array} \right\} \quad (23)$$

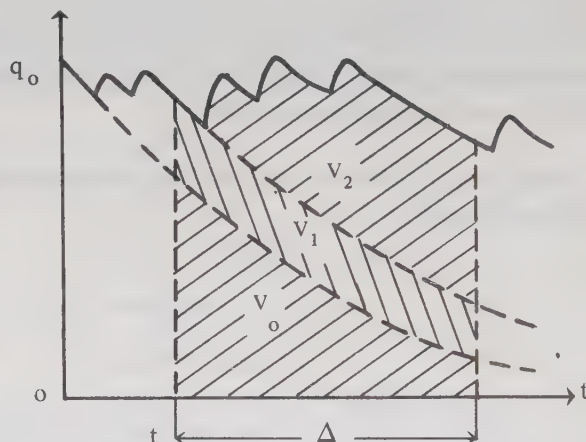


fig. 18

Nous obtenons pour les moments des volumes partiels les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(V_0) = \frac{m_0}{a_0} (1 - e^{-a_0 \Delta}) \cdot e^{-a_0 t} \\ E(V_1) = \lambda \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2} + C} \cdot (1 - e^{-a \Delta}) \cdot e^{-a t} \cdot \int_0^t e^{A \tau^2 + B \tau + a \tau} d\tau \\ E(V_2) = \lambda \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2} + C} \cdot \int_t^{t+\Delta} [1 - e^{-a(t+\Delta-\tau)}] \cdot e^{A \tau^2 + B \tau} d\tau \end{array} \right\} \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Var}(V_0) = \frac{s_0^2}{a_0^2} (1 - e^{-a_0 \Delta})^2 \cdot e^{-2a_0 t} \\ \text{Var}(V_1) = \lambda \cdot e^{2\sigma^2 + 2C} \cdot (1 - e^{-a \Delta})^2 \cdot e^{-2a t} \cdot \int_0^t e^{2A \tau^2 + 2B \tau + 2a \tau} d\tau \\ \text{Var}(V_2) = \lambda \cdot e^{2\sigma^2 + 2C} \cdot \int_t^{t+\Delta} [1 - e^{-a(t+\Delta-\tau)}]^2 \cdot e^{2A \tau^2 + 2B \tau} d\tau \end{array} \right\} \quad (25)$$

Si nous nous intéressons au débit moyen Q plutôt qu'au volume V , nous obtenons le premier par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(Q) = \frac{E(V)}{\Delta} \\ \text{Var}(Q) = \frac{\text{Var}(V)}{\Delta^2} \end{array} \right\} \quad (26)$$

en adoptant évidemment des unités convenables. Le plus simple pour les calculs est d'exprimer les temps en jours, les débits en m^3/s , et les volumes en $(\text{m}^3/\text{s} \times \text{jours})$, ce qui évite le recours à un coefficient de changement d'unités.

354.2 – ESTIMATION DES PARAMETRES

Nous avons vu au § 352.1 l'estimation de λ et au § 353.3 l'estimation de A , B , C , σ^2 . L'estimation de m_0 et s_0^2 a été évoquée au § 353.1. Il reste à considérer a_0 et a . Dans les systèmes d'équations (23) (24) (25) posons $t = 0$ et $\Delta = 90$, autrement dit considérons la moyenne et la variance du volume écoulé pendant la totalité de la période à laquelle nous appliquons le modèle. Soient M et S^2 la moyenne et la variance empiriques de ce volume.

Nous avons tout d'abord $E(V_1) = 0$ et $\text{Var}(V_1) = 0$, ce qui nous ramène au système suivant :

$$\begin{cases} E(V) = E(V_0) + E(V_2) = M \\ \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \quad \text{fonctions de } a_0 \quad \text{fonctions de } a \\ \text{Var}(V) = \text{Var}(V_0) + \text{Var}(V_2) = S^2 \end{cases}$$

Dans ces conditions l'estimation de a_0 et a peut s'effectuer graphiquement selon le processus suivant : les courbes de $E(V_0)$ en fonction de a_0 et de $E(V_2)$ en fonction de a permettent de déterminer le lieu des points satisfaisant à la condition $E(V) = M$ dans le plan (a_0, a) . De la même façon nous déterminons le lieu de $\text{Var}(V) = S^2$. L'intersection de $E(V) = M$ et $\text{Var}(V) = S^2$, si elle existe, donne l'estimation de a_0 et a .

Ces opérations peuvent se représenter par le schéma suivant :

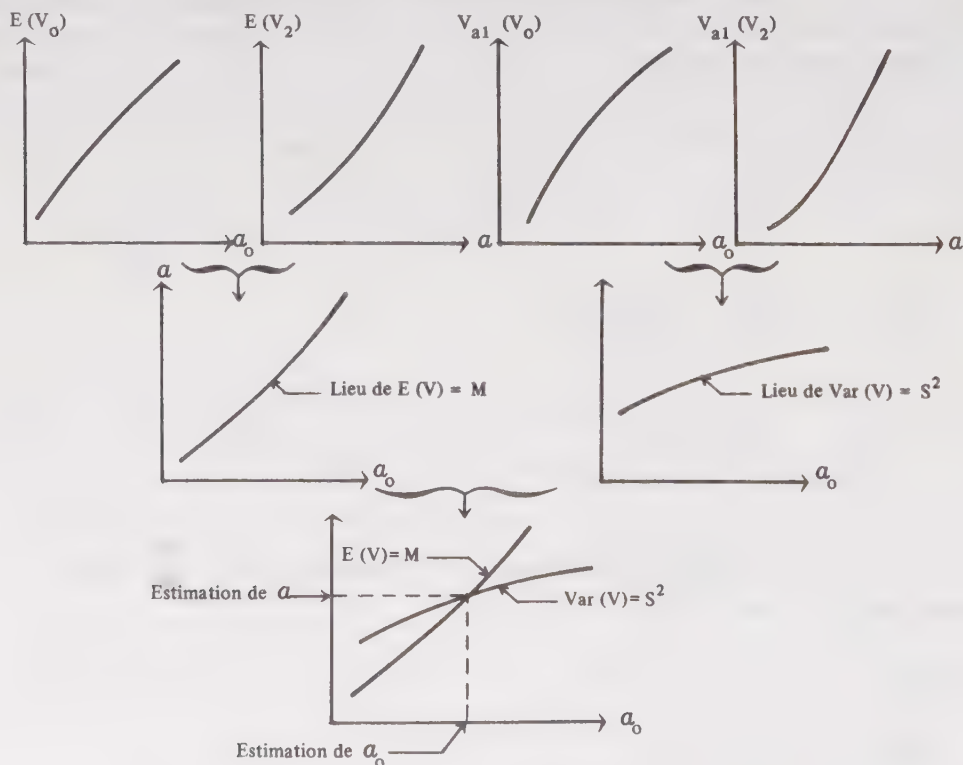


fig. 19

Dans le cas de l'application du procédé aux mesures faites à la station de Kercabanac, nous trouvons $\alpha_0 = 0,037$ et $a = 0,010$.

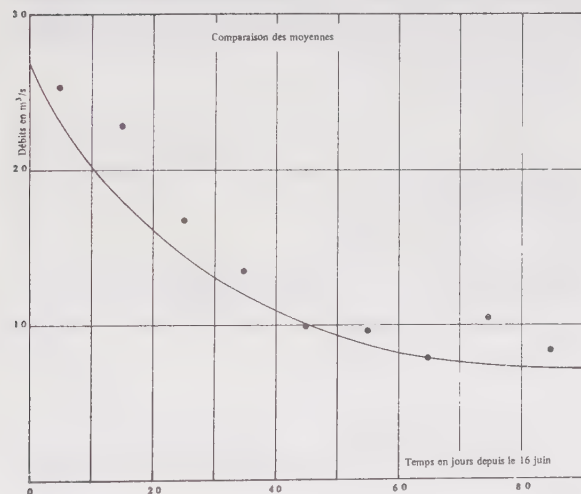
354.3 – COMPARAISON DU MODELE AUX OBSERVATIONS

Lorsque le modèle est établi suivant certaines hypothèses, il est évidemment indispensable de vérifier que l'application de ce modèle restitue une image des débits qui ne soit pas en contradiction avec les débits observés, ce qui permet d'établir la validité éventuelle des hypothèses retenues. Etant donné le caractère assez grossier du modèle, nous avons fait porter les comparaisons sur les débits moyens de 10 jours dans le cas de Kercabanac.

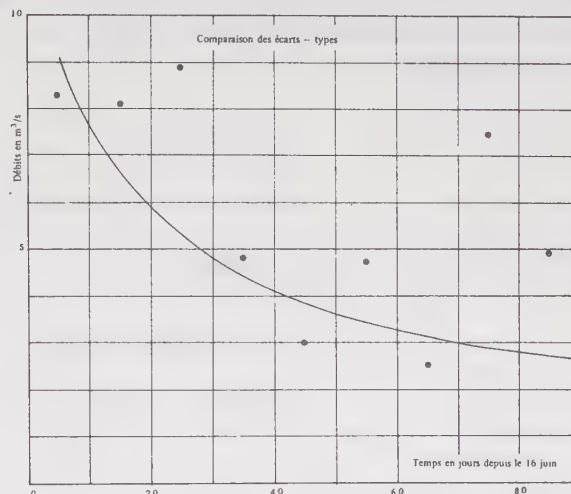
Comme nous l'avons vu pour le modèle autorégressif de débits, la comparaison devrait porter sur les éléments suivants :

- loi de probabilité du débit moyen considéré,
- autocorrélation des valeurs successives du débit moyen.

Le seul point que nous ayons pu comparer de façon analytique concerne les moments de la loi considérée. Les graph. 24 et 25 présentent respectivement la comparaison des moyennes et des écarts-types des débits moyens de 10 jours. L'adéquation paraît convenable de ce point de vue.



graph. 24



graph. 25

Pour ce qui est du type de loi de probabilité et de l'autocorrélation, la simulation permettra de trancher le problème. Nous noterons toutefois que les écoulements élémentaires successifs déterminés sur les observations ne présentent pas d'autocorrélation (après élimination de la tendance générale) ce qui est conforme aux bases théoriques du modèle. Dans ces conditions, nous pouvons présumer qu'il y aura une bonne concordance entre observations et résultats du modèle pour ce qui est de l'autocorrélation des débits moyens de périodes successives.

35.5 – PROBLEMES D'ECHANTILLONNAGE – INTERVALLES DE CONFIANCE

355.1 – MOYENNE ET VARIANCE DES DEBITS

Pour les résultats obtenus analytiquement, c'est-à-dire essentiellement pour la loi du débit moyen d'une période quelconque, il est possible de traiter analytiquement le problème d'échantillonnage de façon approchée, moyennant certaines hypothèses simplificatrices.

La plus importante de ces hypothèses, dont nous justifierons par la suite la nécessité, est celle de la stationnarité du processus. Dans un cas comme celui qui nous intéresse, les résultats obtenus avec cette hypothèse sont forcément optimistes puisque nous ne tenons pas compte des paramètres de non-stationnarité qui présentent eux aussi une certaine variance d'échantillonnage. Une autre méthode pourrait consister à découper la période étudiée en intervalles de temps suffisamment brefs pour qu'on puisse considérer que pendant leur durée le processus est stationnaire. Dans cette deuxième hypothèse le résultat serait certainement pessimiste, car il ne prendrait pas en compte globalement l'ensemble de l'information. En définitive nous ne pouvons donc fournir que des ordres de grandeur.

Intéressons-nous au débit moyen Q relatif à une période donnée. Il s'agit donc tout d'abord d'exprimer $E(Q)$ et $Var(Q)$ dans le cas de stationnarité. On peut obtenir ce résultat en partant par exemple des formules (23), (24), (25), (26), simplifiées par l'hypothèse de stationnarité, ce qui conduit au résultat suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(Q) = \lambda \cdot e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ Var(Q) = \frac{\lambda (\Delta + e^{-a\Delta} - 1) \cdot e^{2\mu + 2\sigma^2}}{a \Delta^2} \end{array} \right. \quad (27)$$

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(Q) = \varphi_1(\mu, \sigma^2) \\ Var(Q) = \varphi_2(\mu, \sigma^2) \end{array} \right.$$

Nous allons chercher à obtenir $Var(\varphi_1)$ et $Var(\varphi_2)$ en fonction des paramètres d'échantillonnage de μ et σ^2 .

On démontre en calcul des probabilités que l'on peut écrire le développement suivant, valable asymptotiquement :

$$Var(\varphi_1) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} \right)^2 \cdot Var(\mu) + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \sigma^2} \right)^2 \cdot Var(\sigma^2) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \sigma^2} \cdot Covar(\mu, \sigma^2) \quad (28)$$

de même pour φ_2 .

Compte tenu du fait que μ et σ^2 sont les paramètres d'une loi normale, nous avons d'autre part, en appelant N l'effectif de l'échantillon :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Var} (\mu) = \frac{\sigma^2}{N} \\ \text{Var} (\sigma^2) = \frac{2 \sigma^4}{N} \\ \text{Covar} (\mu, \sigma^2) = 0 \text{ de façon asymptotique.} \end{array} \right.$$

Nous obtenons en définitive pour expression des variances d'échantillonnage cherchées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Var} (\varphi_1) = \frac{\lambda^2 \cdot (\sigma^4 + 2 \sigma^2) \cdot e^{2\mu + \sigma^2}}{2N} \\ \text{Var} (\varphi_2) = \frac{4 \lambda^2 \cdot (\Delta + e^{-\alpha\Delta} - 1) \cdot (2 \sigma^4 + \sigma^2) \cdot e^{4\mu + 4 \sigma^2}}{N \alpha \Delta^2} \end{array} \right.$$

355.2 – QUANTILES DES DEBITS MOYENS

Si nous préférons nous intéresser aux quantiles de la loi étudiée, nous allons d'abord calculer ces quantiles de la façon suivante. Nous supposons d'abord que Q suit une loi log normale. Dans ces conditions nous allons chercher la variance d'échantillonnage des quantiles de la loi normale log (Q), qui suivent eux-mêmes une loi normale. Appelons m' et s'^2 la moyenne et la variance de log (Q) ; qui s'expriment comme suit en fonction de φ_1 et φ_2 [33] :

$$\left\{ \begin{array}{l} m' = \log \frac{\varphi_1^2}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2}} \\ s'^2 = \log \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2}{\varphi_1^2} \end{array} \right. \quad (29)$$

En remplaçant dans (29) φ_1 et φ_2 par leur expression donnée en (27), nous obtenons, en appelant A' , B' , C' , des constantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} m' = C' + \mu + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{2} \log (\lambda^2 + A' e^{\sigma^2}) \\ s'^2 = \log (1 + B' e^{\sigma^2}) \end{array} \right. \quad (30)$$

D'autre part, le quantile correspondant à la probabilité u s'écrira :

$$\Theta_u = m' + s' \cdot t_u \quad (31)$$

t_u étant le quantile de la loi normale centrée réduite.

En remplaçant dans (31) m' et s' donnés par (30) il vient :

$$\Theta_u = C' + \mu + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{2} \log (\lambda^2 + A' e^{\sigma^2}) + t_u \sqrt{\log (1 + B' e^{\sigma^2})} \quad (32)$$

On exprime alors $\text{Var} (\Theta_u)$ par un développement analogue à (28), ce qui conduit en définitive au résultat cherché :

$$\text{Var } \Theta_u = \frac{\sigma^2}{N} + \frac{\sigma^4}{2N} \left[1 - \frac{A' \cdot e^{\sigma^2}}{\lambda^2 + A' e^{\sigma^2}} + \frac{B' \cdot e^{\sigma^2}}{(1 + B' \cdot e^{\sigma^2}) \sqrt{\log (1 + B' \cdot e^{\sigma^2})}} \cdot t_u \right]^2 \quad (33)$$

Nous pouvons déduire de cette expression des intervalles de confiance pour les quantiles de $\log (Q)$, auxquels correspondent les intervalles de confiance cherchés pour Q .

355.3 – RECHERCHE DE RESULTATS PLUS PRECIS

Les résultats ainsi obtenus ne sont évidemment que des ordres de grandeur, puisque d'une part les formules utilisées ne sont valables qu'asymptotiquement, et d'autre part il faut faire des hypothèses de stationnarité, comme nous l'avons vu. Si nous voulions nous affranchir de cette deuxième approximation et travailler sur le modèle tel que nous l'avons déterminé, il faudrait partir des formules (23) , (24) , (25) , (26) , telles quelles, et employer un développement du même type que celui de la formule (28), mais appliqué cette fois à presque tous les paramètres du modèle : m_0 , s_0 , A , B , C , σ^2 , (a_0, a, λ) , pouvant être considérés pratiquement comme des grandeurs non aléatoires). Ainsi la formule obtenue devrait faire intervenir six variances d'échantillonnage et un nombre encore plus élevé de covariances, en supposant que l'on ait été en mesure de calculer effectivement ces variances et covariances. Le calcul nécessaire semble donc *a priori* quasiment inextricable.

En fait, de même que dans le cas du modèle autorégressif, la solution au problème des distributions d'échantillonnage repose sur la simulation. Il s'agit évidemment de toutes façons de la seule méthode possible lorsqu'on veut déterminer la distribution d'échantillonnage d'une grandeur qui ne peut être elle-même connue qu'à partir de données simulées.

Ce problème d'échantillonnage, commun aux deux modèles étudiés, sera repris en conclusion.

36 – UTILISATION DU MODELE

36.1 – COMPLEMENTS SUR LA LIAISON PLUIES-ECOULEMENTS

L'étude du deuxième sous-modèle fait apparaître la nécessité de modifier la forme de la liaison entre les pluies et les écoulements élémentaires. En effet nous avons résumé cette liaison par la régression (9) de l'écoulement élémentaire par rapport à la pluie nette (§ 345.2). Or, cette régression ne suffit pas à définir complètement la liaison cherchée, car elle ne rend pas compte du fait que les écoulements élémentaires forment un processus non stationnaire (§ 353.3), alors que les pluies réelles et les pluies nettes sont pratiquement stationnaires dans les conditions de l'étude.

Pour lever cette difficulté nous allons faire intervenir un processus stationnaire obtenu par "redressement" du processus des écoulements élémentaires. Cette opération peut être effectuée à l'aide des formules (21) et (22) du § 353.3. Nous sommes conduits à la définition d'une variable "log (H)" déduite de $\log h$ par la relation :

$$\log (H) = \log (h) - (A t^2 + B t + C) \quad (34)$$

La variable obtenue suit un processus stationnaire laplacien de moyenne $\mu' = 0$ et de variance σ^2 . Elle peut être mise en relation de régression linéaire avec les pluies nettes, par une relation du même type que (9) :

$$\log (H) = a'' \log (p') + b''' + \epsilon \quad (35)$$

Le passage d'une pluie nette p' à un écoulement élémentaire h est donc défini par l'emploi successif des formules (35) et (34).

36.2 – OBTENTION DIRECTE DE RESULTATS CONCERNANT LES DEBITS

Remarquons tout d'abord que l'on peut obtenir des résultats concernant les débits, abstraction faite des pluies, en utilisant uniquement le "deuxième sous-modèle". Pour cela on effectue le "démontage" des écoulements observés en écoulements élémentaires (§ 33) et on opère ensuite l'analyse et le "remontage" de ces éléments (§ 35).

Cette opération semble évidemment *a priori* dépourvue d'intérêt : si on veut décrire des débits sans décrire les pluies qui les engendrent, il vaut mieux utiliser un modèle de débits seuls.

L'intérêt du modèle pluies-débits apparaît ici lorsqu'il est possible d'utiliser, pour le "remontage" des écoulements élémentaires, des paramètres de débits améliorés au moyen des données pluviométriques. Dans de telles circonstances le modèle pluies-débits peut être utilisé pour les mêmes applications que le modèle de débits seuls, mais avec une meilleure utilisation de l'information disponible.

36.3 – AMELIORATION DE LA CONNAISSANCE DES DEBITS PAR LA PRISE EN CONSIDERATION DES PLUIES

363.1 – PRINCIPE GENERAL

Il s'agit maintenant de voir comment l'information pluviométrique peut permettre d'améliorer la détermination des débits.

Pour cela partons de la formule de régression (35) et supposons que les débits aient été observés pendant une période T_1 de 10 ans par exemple, et les pluies pendant une période $T_1 + T_2$, nettement plus longue, par exemple 50 ans. Nous allons considérer les moyennes et variances empiriques suivantes :

$$\left| \begin{array}{llll} \mu' & \text{et } \sigma^2, & \text{de } \log (H), & \text{calculées sur la période } T_1 \\ \mu_{T_1} & \text{et } \sigma_{T_1}^2, & \text{de } \log (p') & \text{" " " } \\ \mu_{T_1+T_2} & \text{et } \sigma_{T_1+T_2}^2 & \text{" " " } & \text{" " " } T_1 + T_2 \end{array} \right|$$

On démontre [37] que dans ces conditions les expressions

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M} = \mu' + a'' (\mu_{T_1+T_2} - \mu_{T_1}) \\ \mathcal{S}^2 = \sigma^2 + a''^2 (\sigma_{T_1+T_2}^2 - \sigma_{T_1}^2) \end{array} \right\} \quad (36)$$

constituent des estimations de la moyenne et de la variance de Log H meilleures que μ' et σ^2 , c'est-à-dire des estimations plus voisines en probabilité des valeurs théoriques, ou en d'autres termes des estimations pourvues d'un intervalle de confiance plus étroit.

Les estimations améliorées $\mathcal{M}$ et $\mathcal{S}^2$ sont affectées d'une variance d'échantillonnage que nous allons exprimer en fonction de la variance d'échantillonnage des paramètres μ' et σ^2 [37].

$$\left. \begin{aligned} \text{Var}(\mathcal{M}) &= E \cdot \text{Var}(\mu') \\ \text{Var}(\mathcal{S}^2) &= E' \cdot \text{Var}(\sigma^2) \end{aligned} \right\} (37)$$

E et E', expriment en quelque sorte l'efficacité de l'amélioration des paramètres μ' et σ^2 .

Soit n_1 le nombre de pluies efficaces observées pendant T_1 , n_2 le nombre analogue pour T_2 , et R le coefficient de corrélation observé pendant T_1 entre pluies nettes et écoulements élémentaires. E est donné par la relation :

$$E = 1 - \frac{n_2}{n_1 + n_2} \left[\frac{(n_1 - 2) R^2 - 1}{n_1 - 3} \right]$$

L'opération n'a évidemment d'intérêt que pour $E < 1$, ce qui exige une valeur suffisante pour n_1 et R. D'autre part, l'amélioration est d'autant plus sensible que $\frac{n_2}{n_1}$ et R sont plus grands, comme on pouvait le supposer intuitivement.

En ce qui concerne E', l'expression est trop compliquée pour être donnée ici, et exige pratiquement le recours à l'ordinateur. Notons simplement que $E' > E$, c'est-à-dire que l'amélioration de la précision est toujours plus faible sur la variance que sur la moyenne.

363.2 – UTILISATION POUR LE MODELE

Un développement analogue à (28) avec les nouvelles conditions (37) nous donnera l'estimation de $\text{Var } \Theta_u$ après amélioration des paramètres, soit :

$$\text{Var } \Theta'_u = \frac{\sigma^2}{N} E + \frac{\sigma^4}{2N} \left[1 - \frac{A' e^{\sigma^2}}{\lambda^2 + A' e^{\sigma^2}} + \frac{B' e^{\sigma^2}}{(1 + B' e^{\sigma^2}) \sqrt{\text{Log}(1 + B' e^{\sigma^2})}} \cdot t_u \right] \cdot E'$$

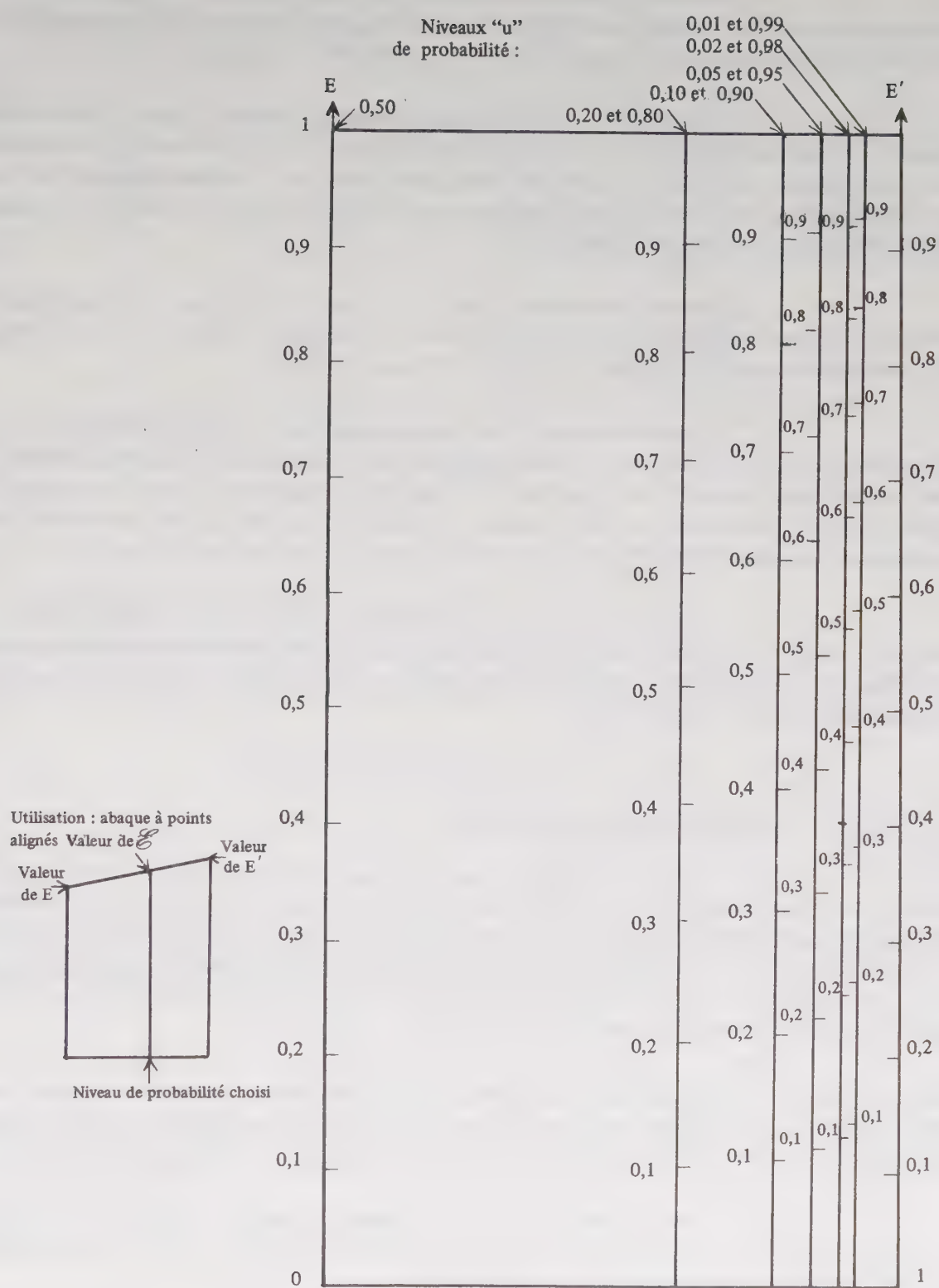
que nous condenserons sous l'écriture : $\text{Var}(\Theta'_u) = i E + i' E'$

Le rapport des variances de Θ'_u et Θ_u s'écrira dans ces conditions :

$$\frac{\text{Var}(\Theta'_u)}{\text{Var}(\Theta_u)} = \frac{i E + i' E'}{i + i'} \quad (38)$$

En fait ce qui nous intéresse en pratique, c'est le rapport des variances du quantile naturel qui se déduit de (38) en utilisant le système (19) du § 352.2, qui permet le passage des variances des lois normales aux variances des lois log-normales transposées. Nous obtenons ainsi pour expression de l'efficacité de l'amélioration sur les quantiles :

$$\mathcal{E} = \frac{e^{2(iE + i'E')} - e^{(iE + i'E')}}{e^{2(i + i')} - e^{(i + i')}} \quad (39)$$



graph. 26

Nous avons construit un abaque donnant $\mathcal{E}$ en fonction de E et E' , pour différentes valeurs de u , concernant la loi du débit moyen de 10 jours (graph. 26). Ainsi, partant du coefficient de corrélation entre pluies nettes et pluies efficaces, on calcule E et E' , et on en déduit $\mathcal{E}$ avec l'abaque.

L'examen de cet abaque permet quelques conclusions : pour le débit médian, l'efficacité est pratiquement identique à E ; pour des probabilités u et $1 - u$, la valeur de $\mathcal{E}$ est pratiquement la même ; plus le quantile correspond à une fréquence rare, plus $\mathcal{E}$ dépend de E' et moins il dépend de E , relativement. En corollaire du fait que $E' > E$, l'amélioration obtenue sera d'autant plus faible que le quantile considéré correspondra à une fréquence plus rare.

Exemple d'application. Pour $T_1 = 10$ ans, $T_2 = 25$ ans et un coefficient de corrélation de 0,85 entre pluies nettes et écoulements élémentaires, on trouve $E = 0,51$ et $E' = 0,67$. L'abaque fournit alors immédiatement $\mathcal{E} = 0,59$ pour $u = 0,20$, $\mathcal{E} = 0,60$ pour $u = 0,10$ etc.

Le bénéfice obtenu sur les paramètres améliorés se répercute évidemment sur les débits, mais en fait il faut bien voir que les débits comportent une part résultant des conditions initiales qui ne peut être améliorée (volume V_0 de la fig. 18). Cette part est prépondérante au début de la période et négligeable à la fin. L'amélioration est donc nulle au 15 juin, mais croît rapidement vers son maximum dans les exemples que nous avons traités.

Nous avons obtenu ainsi un résultat de la plus grande importance pratique, car il permet de se rendre compte dans un cas d'application quelconque si la prise en compte des pluies est susceptible d'améliorer de façon sensible la détermination des débits, ou si au contraire on peut se contenter d'un modèle de débits seuls, plus simple d'emploi.

36.4 – LOI CONDITIONNELLE DES DEBITS

Pour achever d'exposer ce qu'il nous semble possible de tirer du modèle de façon analytique, nous allons maintenant voir comment déterminer les premiers moments de la loi conditionnelle des débits à venir, connaissant le débit à un instant donné du processus, comme nous l'avons fait pour le modèle autorégressif. Comme nous l'avons signalé au § 122.4, il ne s'agit ici que d'une prévision à court terme effectuée lorsqu'on se trouve à une date postérieure à l'instant zéro du modèle, c'est-à-dire après le 16 juin dans les exemples sur lesquels nous avons travaillé.

Supposons que nous nous trouvions actuellement à un instant t_A et que nous mesurons un débit q_A . Le problème que nous nous posons consiste à déterminer la loi de probabilité conditionnelle du volume V' susceptible de s'écouler dans un intervalle de temps futur $(t, t + \Delta)$ quelconque.

Il est impossible de faire une translation du modèle de l'instant zéro à l'instant t_A , le coefficient a_0 étant propre à l'instant zéro qui a servi à caler le modèle, ce qui ne permet pas de transposer au problème de prévision le découpage retenu pour V (fig. 18).

Nous sommes conduits à un découpage du volume V' un peu plus complexe que celui de V (fig. 20).

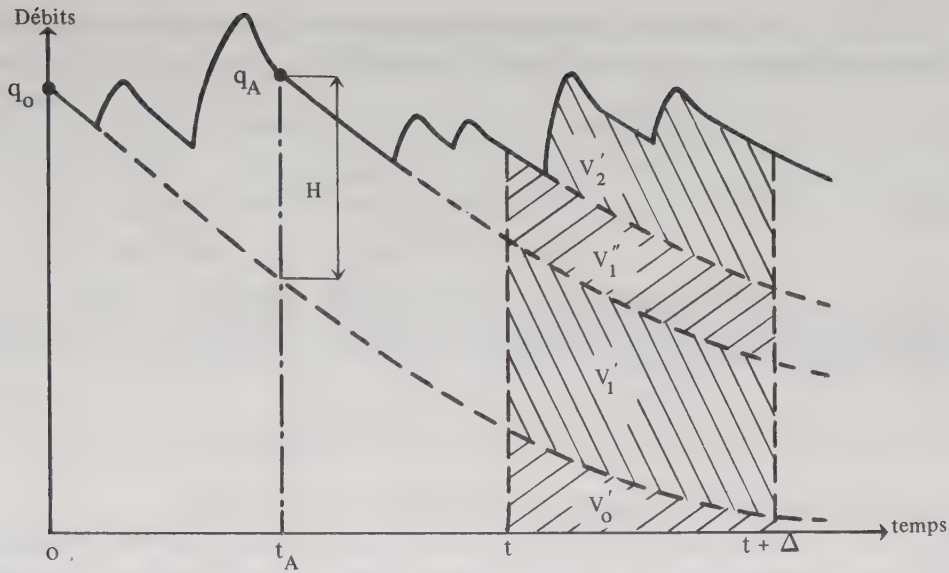


fig. 20

V_0' est le volume *déterminé* résultant des pluies antérieures à l'instant zéro.

V_1' est le volume *déterminé* résultant des pluies survenues entre zéro et t_A

V_1'' est le volume *aléatoire* résultant des pluies susceptibles d'intervenir entre t_A et t .

V_2' est le volume *aléatoire* résultant des pluies susceptibles d'intervenir entre t et $t + \Delta$.

Nous aurons donc d'abord :

$$\left. \begin{aligned} E(V') &= V_0' + V_1' + E(V_1'') + E(V_2') \\ \text{Var}(V') &= \text{Var}(V_1'') + \text{Var}(V_2') \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Le volume V_0' aura la même expression que $E(V_0)$ de la formule (24) en remplaçant V_0 par q_0 . Sa valeur *déterminée* sera donc :

$$V_0' = \frac{q_0}{a_0} (1 - e^{-a_0 \Delta}) \cdot e^{-a_0 t} \quad (41)$$

Soit H' le supplément de débit déterminé provoqué par les pluies de l'intervalle de temps (zéro, t_A). Nous aurons $H' = q_A - q_0 e^{-a_0 t_A}$. Le supplément de débit correspondant K' à un instant ultérieur quelconque sera donné par :

$$K' = H' \cdot e^{-a(\tau - t_A)}$$

$$\text{D'autre part la valeur déterminée de } V_1' \text{ s'exprime par : } V_1' = \int_t^{t+\Delta} K' d\tau$$

$$\text{d'où : } V_1' = \frac{(q_A - q_0 \cdot e^{-a_0 t_A})}{a} \cdot e^{-a(t - t_A)} \cdot (1 - e^{-a\Delta}) \quad (42)$$

Le volume V_1'' est analogue au volume V_1 , en remplaçant la borne inférieure zéro par t_A dans les intégrales données par (24) et (25), c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(V_1'') = \lambda \cdot e^{-\sigma^2/2 + C} \cdot (1 - e^{-a\Delta}) \cdot e^{-at} \cdot \int_{t_A}^t e^{A\tau^2 + B\tau + a\tau} d\tau \\ \text{Var}(V_1'') = \lambda \cdot e^{2\sigma^2 + 2C} \cdot (1 - e^{-a\Delta})^2 \cdot e^{2at} \cdot \int_{t_A}^t e^{-2A\tau^2 + 2B\tau + 2a\tau} d\tau \end{array} \right\} \quad (43)$$

Enfin le volume V_2'' est rigoureusement identique au volume V_2 en supposant que l'on ne sache pas prévoir à l'instant t_A les pluies de l'intervalle de temps $(t, t + \Delta)$. Répétons ici les formules utiles par mesure de commodité :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(V_2'') = \lambda \cdot e^{\sigma^2/2 + C} \cdot \int_t^{t+\Delta} [1 - e^{-a(t+\Delta-\tau)}] \cdot e^{A\tau^2 + B\tau} d\tau \\ \text{Var}(V_2'') = \lambda \cdot e^{2\sigma^2 + 2C} \cdot \int_t^{t+\Delta} [1 - e^{-a(t+\Delta-\tau)}]^2 \cdot e^{2A\tau^2 + 2B\tau} d\tau \end{array} \right\} \quad (44)$$

L'ensemble des formules (41), (42), (43), (44) résout le problème posé.

36.5 – SIMULATION DES PLUIES ET DES DEBITS

365.1 – PRINCIPE

Nous avons déterminé dans les chapitres précédents tous les éléments nécessaires pour reconstituer une série de débits à partir d'une série de pluies donnée. Décrivons maintenant en quoi consistera la simulation de séries de pluies et de débits concomitantes.

Il est évidemment nécessaire de simuler tout d'abord des pluies journalières, opération qui a déjà été mise au point au Groupe Hydrologie [9]. Nous pouvons obtenir un nombre aussi grand que nécessaire d'épisodes pluvieux et donc de valeurs de p . L'utilisation de la pluie limite (§ 34.5) permet de passer de p à p' . Les relations (35) et (34) du § 36.1, permettent de simuler des valeurs de h à partir des valeurs de p' .

Ayant obtenu de cette façon une suite de valeurs d'écoulements élémentaires h , il suffit d'appliquer la fonction de transfert (20) à chaque valeur de h pour la transformer en une suite de débits, et de cumuler les débits ainsi obtenus. Supposons plus précisément que nous voulions simuler une suite de débits moyens journaliers. Le débit du jour t résultera de la superposition du débit $q_0 \cdot e^{-a_0 t}$ provenant des pluies antérieures à l'instant 0, et de débits $a \cdot h_i \cdot e^{-a(t - \tau_i)}$ provenant de chaque écoulement élémentaire h_i apparu à un instant t_i antérieur à t .

365.2 – UTILISATION

Cette opération est d'un intérêt capital dans les deux circonstances où le modèle pluies-débits est utile (§ 28.2).

D'une part lorsqu'on juge que les pluies apportent une amélioration dans la connaissance des débits, on peut utiliser une série de débits générée à partir d'une série de pluies pour les mêmes applications que celles du modèle de débits seuls (voir exemples d'application au § 26.1).

D'autre part, la génération simultanée des pluies et des débits permet de résoudre les problèmes hydrologiques dans le cas où besoins et ressources sont liés, c'est-à-dire pratiquement dans le cas de l'irrigation.

37 – CONCLUSIONS SUR LE MODELE PLUIES-DEBITS

Nous examinerons d'abord brièvement le bilan des résultats acquis et nous exposerons ensuite plus en détail les aspects prospectifs particuliers au modèle pluies-débits que nous avons étudié.

37.1 – RESULTATS OBTENUS

Il convient d'abord d'attirer l'attention sur le fait que notre modèle pluies-débits n'est pas parvenu à un stade opérationnel comme notre modèle autorégressif. A cela il y a deux raisons : tout d'abord l'étude de ce dernier modèle a été entreprise logiquement après celle du modèle auto-régressif et ensuite il y a une grande différence de complexité entre les deux modèles, comme c'était prévisible, et comme cela ressort de la comparaison des chapitres 2 et 3.

Un certain nombre de résultats sont malgré tout d'ores et déjà acquis, et semblent préjuger favorablement des possibilités du modèle.

Tout d'abord le modèle est fidèle aux observations en ce qui concerne les lois de probabilité des débits, tout au moins leurs moments.

Ensuite, et sous réserve de vérification complète de la fiabilité du modèle, la méthodologie d'emploi est au point, tant en ce qui concerne la prise en compte des pluies pour améliorer la connaissance des débits qu'en ce qui concerne la simulation de données en vue des applications qui incluent celles du modèle de débits seuls, et permettent en plus d'envisager le traitement des problèmes d'irrigation.

37.2 – ASPECTS PROSPECTIFS

Compte tenu de l'état d'avancement de l'étude, l'aspect prospectif en est absolument essentiel ; d'ailleurs le modèle est actuellement en cours de développement au Groupe Hydrologie.

372.1 – ACHEVEMENT DU TRAVAIL EN COURS

Le premier but à atteindre est de mettre au point la simulation de données par ordinateur, ce qui permettra d'être définitivement fixé sur l'adéquation du modèle aux observations. Dans le cas favorable, le modèle sera opérationnel.

372.2 – EXTENSION TEMPORELLE ET CONDITIONS INITIALES

Le point faible du modèle est actuellement constitué par le problème des conditions initiales. En effet, ces conditions nécessitent l'intervention d'un modèle de débits seuls (§ 353.1) et ne peuvent donc bénéficier de l'amélioration qui peut éventuellement résulter de la prise en compte des pluies.

La solution idéale pour lever cette difficulté consisterait à étendre l'application du modèle à l'ensemble de l'année, mais il est probable que des difficultés apparaîtront lorsqu'on abordera la période hivernale, du fait de l'intervention des neiges en particulier. Dans l'immédiat, la solution nous paraît résider dans le fait de démarrer le processus un mois avant la date à laquelle il est utile, ce premier mois constituant une "amorce" dont on se désintéressera par la suite. Dans ces conditions il sera possible de bénéficier au maximum de l'information pluviométrique dans la période utile.

372.3 – AUTRES AMELIORATIONS DU MODELE

A une échéance moins immédiate, le modèle est susceptible d'amélioration sur d'autres points. En particulier des recherches en cours au G. H., pourraient avoir des conséquences sur ce modèle. Les améliorations que l'on peut d'ores et déjà entrevoir sont les suivantes :

- modifications des hypothèses sur les transferts pluies-débits par utilisation des résultats des modèles déterministes,
- utilisation de fonctions de transfert mieux appropriées, dans le but de permettre l'application du modèle à la description des crues,
- utilisation d'un processus de description des pluies à une échelle plus fine que la journée, dans le même but.

372.4 – APPLICATION A L'IRRIGATION

En utilisant simultanément :

- un modèle pluies-débits,
- un modèle déterministe permettant de passer du processus des pluies au processus des besoins en eau du sol (éventuellement couvert de végétation) il devient possible d'envisager un modèle global besoins-ressources capable de décrire simultanément le comportement hydrique d'un sol à irriguer et les débits susceptibles de l'alimenter, ce qui peut se résumer dans le schéma ci-contre.

Un tel modèle devrait permettre d'aborder la conception des projets d'irrigation par les méthodes de la recherche opérationnelle, l'hydrologie ne constituant évidemment dans ce problème qu'un élément parmi d'autres, et plus précisément :

- les facteurs agronomiques : liaisons entre comportement hydrique du sol et rendement culturels,
- les facteurs économiques.

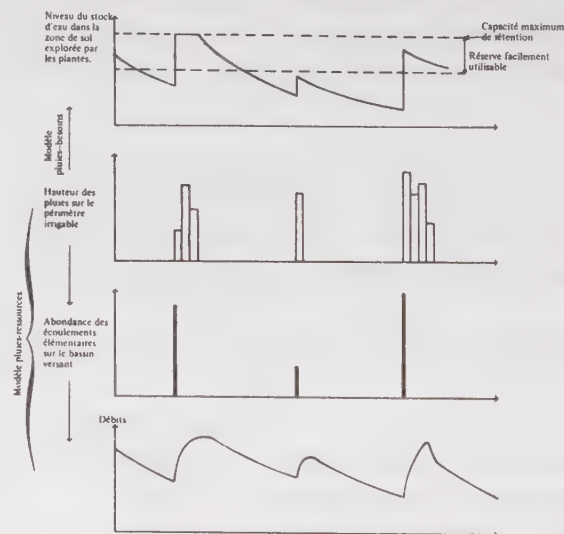


fig. 21

4 – CONCLUSIONS

Après avoir étudié chacun de nos deux modèles, nous avons fait le bilan des résultats acquis et des possibilités de développements qui leur sont propres. Il convient maintenant de conclure sur l'ensemble de l'étude et d'examiner les aspects prospectifs communs aux deux modèles considérés.

41 – RESULTATS OBTENUS

Il apparaît en l'état actuel de l'étude que nous avons pu développer à des stades différents deux modèles hydrologiques de complexité inégale.

Le modèle autorégressif de débits est maintenant opérationnel : les programmes de calcul automatique sont au point et rien ne s'oppose *a priori* à l'emploi du modèle pour d'autres rivières que celles sur lesquelles a porté l'étude.

Le modèle pluies-débits est actuellement exploité sur le plan analytique et en cours d'élaboration du point de vue du traitement automatique. Il semble devoir connaître un domaine d'application plus large que le précédent.

42 – ASPECTS PROSPECTIFS

42.1 – ECHANTILLONNAGE ET INTERVALLES DE CONFIANCE

Nous avons tenté d'aborder ce problème de façon empirique dans le cas du modèle autorégressif (§ 23.2) et de façon analytique dans le cas du modèle pluies-débits (§ 35.5) sans parvenir à des résultats satisfaisants.

Seule la simulation est susceptible de résoudre de façon générale le problème pratique des intervalles de confiance. Voyons schématiquement en quoi peut consister cette méthode.

Considérons une statistique quelconque "*a*" établie à partir de *n* années d'observations grâce au modèle. Nous cherchons à établir un intervalle de confiance sur cette estimation. Pour cela nous générons *m* séries de *n* années, d'où nous pouvons tirer *m* estimations $a_1, a_2, \dots, a_m$. Ces estimations présentent une distribution de fréquences empiriques permettant de déterminer un intervalle de confiance pour *a*.

En pratique, l'estimation d'une valeur "*a*" avec une certaine précision exigera la simulation d'un nombre assez élevé "*p*" d'années de débits. Pour traiter le problème d'échantillonnage il faudra donc analyser au total (*m* + 1) séries de débits et simuler (*mn* + *mp*) années de débits, ce qui donne en posant par exemple *m* = 100, *n* = 10, *p* = 100, 101 séries à analyser et 11.000 années à simuler !

Il va sans dire qu'une telle opération est très onéreuse et qu'on ne peut envisager de la mettre en oeuvre que si l'importance pratique de l'intervalle en question le justifie.

42.2 – EXTENSION TEMPORELLE

Les modèles que nous avons étudiés n'ont été développés que sur la période estivale. Nous avons longuement exposé en introduction (§ 1.2) la raison de ce choix. L'extension à l'ensemble de l'année de modèles de description fine des débits ne semble présenter d'intérêt pratique que pour l'étude des crues. En fait les recherches dans ce domaine sembleraient s'orienter vers la mise au point de modèles spécifiques de crues, plutôt que vers la mise au point de modèles universels.

Une extension temporelle limitée reste néanmoins souhaitable pour le modèle pluies-débits, pour les raisons particulières que nous avons examinées au § 372.2.

42.3 – EXTENSION GEOGRAPHIQUE – INFORMATION EXTERIEURE

423.1 – DOMAINE GEOGRAPHIQUE D'APPLICATION

Une question évidemment fondamentale pour l'avenir des modèles étudiés concerne la possibilité de leur application à d'autres rivières que celles qui ont fait l'objet de l'étude.

Il faut d'abord observer que ces dernières, affluents respectifs de la Garonne et de l'Allier, ont des régimes différents, ce qui laisse espérer une certaine généralité dans le domaine géographique d'application des modèles.

A priori, on peut supposer que le modèle de débits seuls peut s'appliquer à tous les régimes hydrologiques, mais que le modèle pluies-débits est uniquement applicable aux régimes exclusivement ou essentiellement pluviaux, tout au moins pendant la saison à laquelle on s'intéresse, ce qui en fait est le cas d'une grande proportion des cours d'eau français.

423.2 – UTILISATION DE STATIONS VOISINES

Dans le même ordre d'idées on peut être amené à se demander de quelle façon on peut prendre en compte pour une station déterminée l'information relative aux stations voisines. Ce point est fondamental lorsqu'il s'agit de traiter une station pour laquelle on possède peu de mesures. Ce type de problèmes fait l'objet, notamment au G. H., d'un ensemble de recherches sur lequel il n'y a pas lieu de s'étendre ici, mais qui mérite d'être signalé.

423.3 – SIMPLIFICATION DES ESTIMATIONS

En ce qui concerne nos modèles, le premier résultat à attendre de ce type d'études serait d'être en mesure d'éluider dans le plus grand nombre de cas l'estimation de certains paramètres, plus précisément ceux qui concernent des variances et présentent de ce fait une forte variation d'échantillonnage.

Pour prendre un exemple plus précis, il est de constatation courante que les coefficients de variation des débits moyens, à une échelle de temps pas trop fine, sont généralement peu variables en cours d'année, et peu différents pour des rivières voisines. Des observations de cet ordre, appliquées aux

paramètres de nos modèles, pourraient améliorer l'utilisation de ceux-ci à des stations pour lesquelles on ne dispose que de courtes séries d'observations. En pratique, on ne peut guère envisager de traiter ce problème à titre purement scientifique, à cause du nombre important de données qu'il serait nécessaire de traiter et du coût qui en résulterait, mais il pourra présenter le plus grand intérêt si une réalisation effective se trouve à la clef de l'étude.

ANNEXE

PLAN

	<i>Pages</i>
1 – INTRODUCTION.....	73
2 – PRINCIPES ET CARACTERISTIQUES DU MODELE.....	73
21 – DESCRIPTION DU MODELE.....	73
22 – LOIS DE PROBABILITE DES VARIABLES.....	75
23 – LIAISON ENTRE LES VARIABLES.....	77
24 – LA VARIABLE b	77
25 – LA LOI DU TARISSEMENT.....	78
26 – AUTOCORRELATION ET VARIATION SYSTEMATIQUES DANS LE TEMPS.....	79
27 – DEMARRAGE DU PROCESSUS.....	79
3 – TRAITEMENT DU MODELE PAR LE CALCUL DES PROBABILITES CLASSIQUES	81
31 – PREMIERE APPROCHE DU PROBLEME.....	81
32 – APPROCHE SIMPLIFIEE.....	84
33 – LIMITE DE L'ETUDE PROBABILISTE PAR LES METHODES CLASSIQUES.....	87
4 – TRAITEMENT DU MODELE PAR LA THEORIE DU RENOUVELLEMENT.....	87
41 – DEFINITION D'UN PROCESSUS SIMPLIFIE.....	87
42 – DEFINITION D'UN PROCESSUS TRANSPOSE.....	87
43 – LOI DU NOMBRE DE REACTIONS.....	88
44 – UTILISATION DES PROPRIETES DU PROCESSUS CUMULATIF.....	89
45 – CONDITIONS PARTICULIERES.....	89
46 – LOI DE λ	91
47 – LOI CONDITIONNELLE DES DEBITS DU PROCESSUS SIMPLIFIE.....	92
48 – LOI MARGINALE DES DEBITS DU PROCESSUS SIMPLIFIE.....	92
49 – LOIS DE PROBABILITE DES DEBITS JOURNALIERS.....	93
4.10 – LOI DE PROBABILITE DES VOLUMES ECOULES.....	95
5 – VERIFICATION DU MODELE – CONCLUSION	99
51 – APPLICATION A UNE LONGUE SERIE D'OBSERVATIONS.....	99
52 – RAISONS DE L'INADEQUATION DU MODELE DE RENOUVELLEMENT.....	99

1 – INTRODUCTION

Avant d'entreprendre les études concernant notre modèle autorégressif, nous avons tenté de développer un modèle de débits par le calcul des probabilités "classique" (c'est-à-dire sans intervention de processus stochastiques) ce qui a conduit assez rapidement à une impasse. Le modèle, repris ensuite avec la théorie du renouvellement, a pu être développé jusqu'au calcul de la loi de probabilité des volumes écoulés dans un intervalle de temps quelconque ; autrement dit du point de vue analytique le modèle a été poussé plus loin que l'a été ensuite le modèle autorégressif.

Malheureusement, les résultats ainsi obtenus se sont révélés très différents des données de base qui ont servi à établir le modèle, mettant en cause l'adaptation de ce dernier au phénomène étudié ; la synthèse effectuée avec le modèle autorégressif a permis d'ailleurs de déceler par la suite la raison de cette inadéquation.

Etant donné l'échec que constitue ce modèle sur le plan des applications pratiques, nous avons préféré ne pas l'intégrer dans la rédaction principale, qui s'en serait trouvée inutilement alourdie. Néanmoins nous avons jugé utile de faire à ce sujet ce qui constitue en quelque sorte essentiellement un compte rendu de recherche sur des applications du calcul des probabilités classique et de la théorie du renouvellement.

2 – PRINCIPE ET CARACTERISTIQUES DU MODELE

Les données de base utilisées au départ concernent les débits mesurés entre le premier juillet et le trente septembre à la station de Peyrat sur la rivière "l'Hers" dans le haut bassin de la Garonne [29] [30].

2.1 – DESCRIPTION DU MODELE

Nous sommes partis de l'observation que la succession des débits en période de tarissement semble suivre une loi exponentielle bien déterminée. L'estimation de cette loi se fait à partir des segments de courbe de tarissement définis par la fig. 22, correspondant à ce que nous appellerons les "phases de tarissement" – Cette estimation sera exposée dans un paragraphe ultérieur.

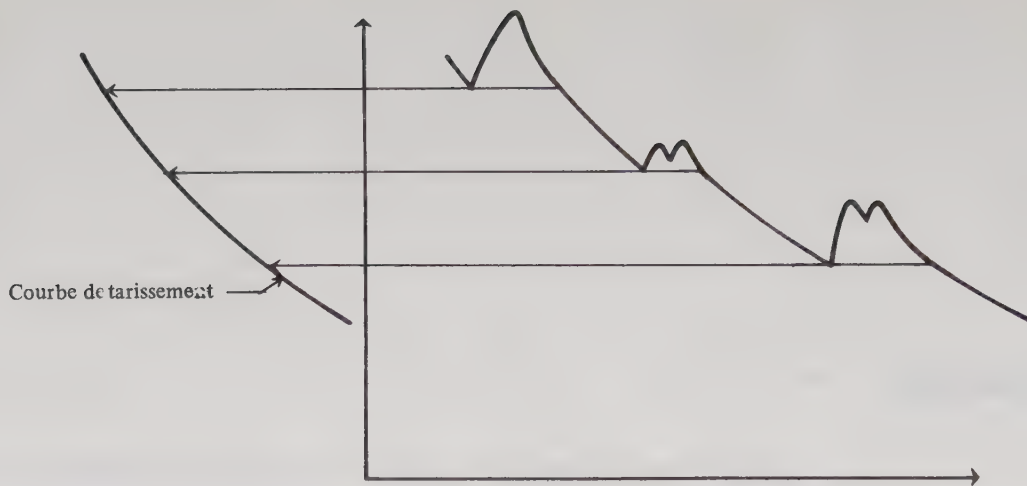


fig. 22

Le modèle peut se définir alors comme une succession de décalages dans le temps de cette courbe de tarissement, décalages que nous appellerons conventionnellement “phases de crue” et au cours desquels s’écoule un certain volume complémentaire.

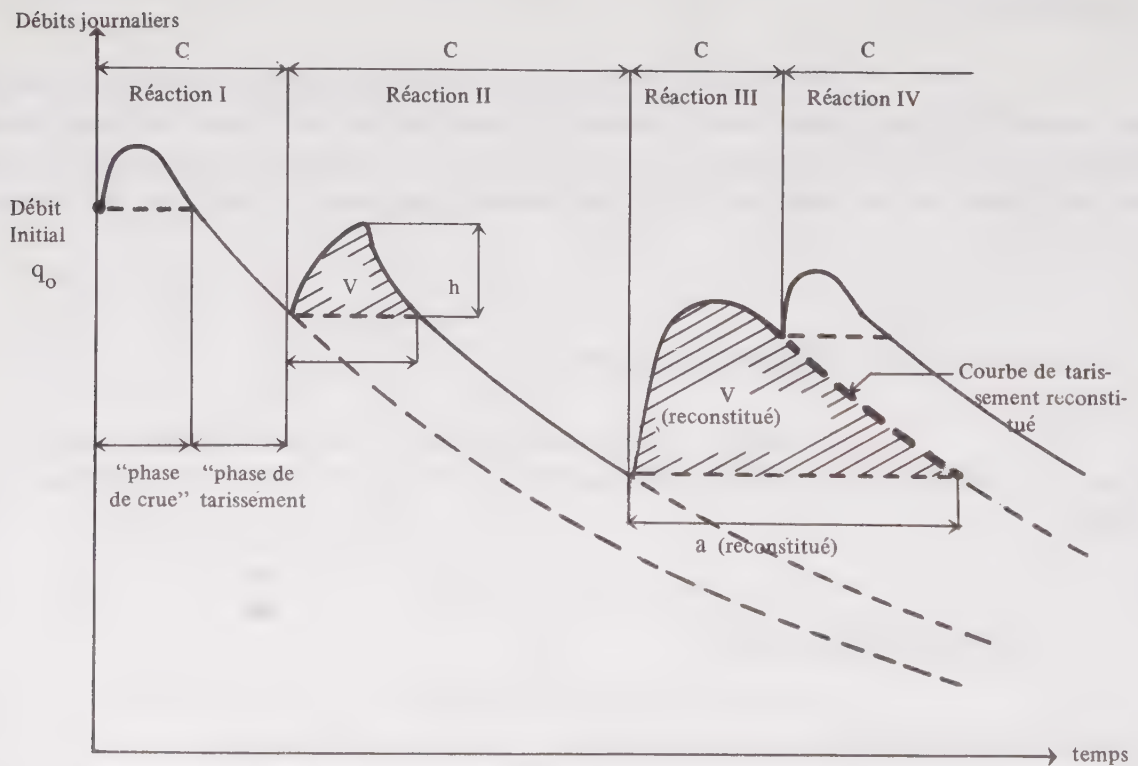


fig. 23

Nous adoptons comme variables aléatoires :

- a , décalage, ou durée de la phase de crue
- c , intervalle de temps séparant deux réactions successives
- v , volume complémentaire écoulé pendant la phase de crue
- h , hauteur complémentaire maximale.

Il arrive que l'on ait $c < a$ (réaction III de la fig.23) ce qui oblige à reconstituer a et v pour que ces variables aient une définition homogène dans tous les cas.

En pratique les phases de crue sont souvent simplement représentées par des paliers, c'est-à-dire que $h = 0$, $v = 0$. Il s'agit certainement d'une conséquence de l'imprécision des mesures d'étiage, et non de perturbations artificielles dont la station semble exempte. Dans de tels cas l'estimation de a est sujette à caution. Pour les débits les plus faibles, nous avons également des doutes concernant la validité d'assimiler la courbe de tarissement à la courbe standard. D'autre part, il est probable que certaines réactions n'apparaissent pas sur le modèle, et que certaines réactions du modèle résultent de la superposition de plusieurs réactions réelles. L'imprécision des mesures n'est d'ailleurs pas seule en cause, il faut également penser que le fait de considérer la succession des moyennes journalières est une schématisation plus ou moins grossière du processus réel et continu des débits.

De toute façon, nous avons pris le parti d'adopter une façon de procéder simple et rigide, ne laissant pas de part à l'interprétation, plutôt que de faire des hypothèses compliquées et non vérifiables sur la part des phénomènes attribuables aux pluies et la part attribuable aux erreurs de mesure, ou plutôt que d'éliminer une partie des mesures sous prétexte qu'elles sont suspectes, car de façon générale les mesures d'étiages sont toujours plus ou moins suspectes, de l'avis des spécialistes. D'autre part les mesures les plus visiblement douteuses concernant en général les plus faibles débits, leur élimination conduirait donc à biaiser la mise au point du modèle.

Pour le dépouillement des données, nous avons adopté au départ la convention consistant à prendre en compte toutes les réactions de l'intervalle 1er juillet – 30 septembre, et à considérer dans leur totalité les réactions en cours à l'une de ces dates. Dans un chapitre ultérieur nous adopterons d'autres conventions et reviendrons sur le problème du démarrage du processus.

22 – LOIS DE PROBABILITE DES VARIABLES

Nous avons tenté d'établir si les distributions empiriques des variables du modèle s'ajustaient à des lois de probabilité classiques, en traitant le problème de façon graphique (loi exponentielle, loi normale, loi log-normale) ou par ajustement statistique (loi de Pearson III, loi des fuites [38]). Nous avons obtenu les résultats suivants, avec 137 observations.

22.1 – LOI DE " c "

On peut considérer qu'il s'agit de la variable fondamentale du modèle, celle qui lie le processus des débits au processus des pluies, aussi avons nous insisté sur son ajustement.

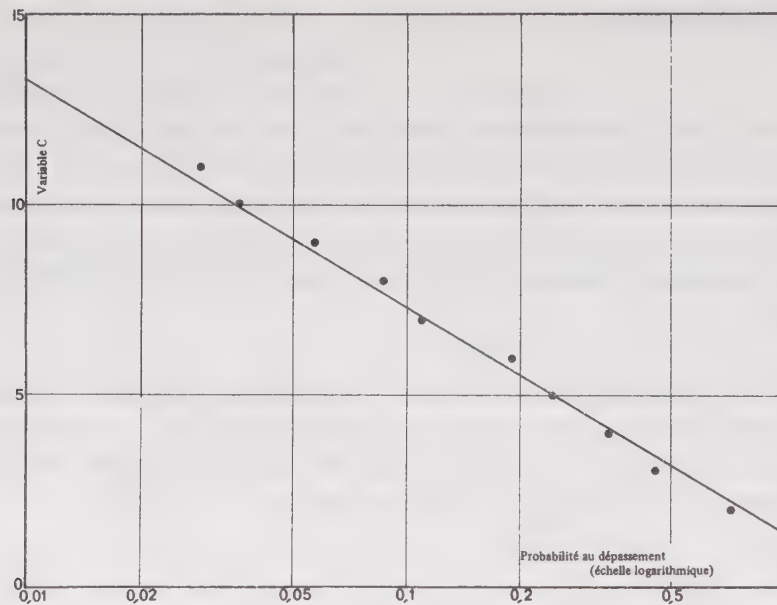
Nous avons d'abord essayé l'ajustement à une loi continue, plus pratique qu'une loi discontinue pour le traitement probabiliste du modèle, bien que la variable soit discontinue (nombre entier de jours).

Sur un papier à graduation semi-logarithmique, on observe que les points expérimentaux de fréquence au dépassement s'alignent à peu près selon une droite, qui ne passe d'ailleurs pas par l'origine. Nous avons donc cherché l'ajustement de $(c - k)$ à une loi exponentielle de densité :

$$\frac{1}{\mu} \cdot e^{-\frac{(c-k)}{\mu}}$$

k étant une constante qu'il faut estimer en même temps que le paramètre μ de l'exponentielle. L'estimation par la méthode des moments donne un système d'équations dont la résolution paraît *a priori* laborieuse. La méthode du maximum de vraisemblance donne une seule équation que nous avons complétée par la condition d'égalité entre la moyenne et l'écart-type, caractéristique de la loi exponentielle. Le résultat obtenu est infirmé par le test du χ^2 . Nous avons ensuite calculé la droite des moindres carrés des points expérimentaux en coordonnées semi-logarithmiques, ce qui donne un résultat acceptable du point de vue graphique et par application du test de χ^2 (cf. graph. 27). La densité de probabilité retenue s'écrit :

$$f(c - 1,4) = \frac{1}{2,5} \cdot e^{-\frac{(c-1,4)}{2,5}}$$



graph. 27

Nous avons utilisé ensuite un ajustement plus logique basé sur l'hypothèse d'une loi de probabilité géométrique pour cette variable qui ne prend que des valeurs discrètes, ajustement plus pratique que le précédent pour la génération éventuelle de données sur ordinateur.

Ce n'est d'ailleurs pas précisément c qui s'ajuste à une telle loi, mais $c - 1$, ce qui est cohérent avec le fait que c ne prend que des valeurs entières > 1 . Le test du χ^2 s'avère favorable à cette hypothèse, qui conduit à l'expression suivante, donnant la probabilité que la variable aléatoire C prenne une valeur entière $c > 1$:

$$\text{Prob} [C = c] = (0,693)^{c-1} \cdot (1 - 0,693)$$

22.2 – LOI DE “a”

La distribution empirique de a ne semble pas s'ajuster à une loi classique. Néanmoins pour les valeurs les plus faibles la distribution est voisine d'une loi exponentielle.

22.3 – LOIS DE “v et h”

Il faut d'abord noter que pour ces variables il y a 71 observations nulles sur 137 observations. Nous n'obtenons aucun ajustement satisfaisant à une loi classique. Cependant, nous trouvons le résultat suivant intéressant pour la génération de données :

$$\text{Prob} [h = 0 , v = 0] \approx 0,8^{a-1}$$

pour a donné.

De toutes façons, il ne semble pas très utile d'insister sur l'ajustement de a, v, h. En effet si ces variables dépendent de c, les lois conditionnelles nous intéressent beaucoup plus que les lois marginales, qui ne sont susceptibles d'être utiles éventuellement qu'à titre de vérification.

23 – LIAISON ENTRE LES VARIABLES

Nous avons estimé les coefficients de corrélation liant les différentes variables et dans le cas de distribution très dissymétrique nous avons fait le calcul avec les logarithmes des variables.

Les résultats les plus importants sont les suivants :

- a est liée à c (coefficient de corrélation, $\log c$, $\log a$: 0,88)
- v et h sont liées à a
- v est liée étroitement à h et ah ($\log v$, $\log h$: 0,962 et $\log v$, $\log ah$: 0,966)

Nous admettrons dans tous ces cas que les liaisons sont linéaires, et que la loi conditionnelle est une loi normale de variance constante.

24 – LA VARIABLE “b”

La liaison entre c et a étant gênante pour le développement ultérieur du modèle, nous nous sommes intéressés à la variable $b = c - a$. Cette variable présente d'ailleurs une importance théorique fondamentale dans le modèle. En effet soit $q = q_0 e^{-at}$ l'équation de l'exponentielle de tarissement. Le débit initial de la réaction de rang i sera donné par l'équation :

$$q_i = q_0 \cdot e^{-a \sum_{j=0}^{i-1} b_j}$$

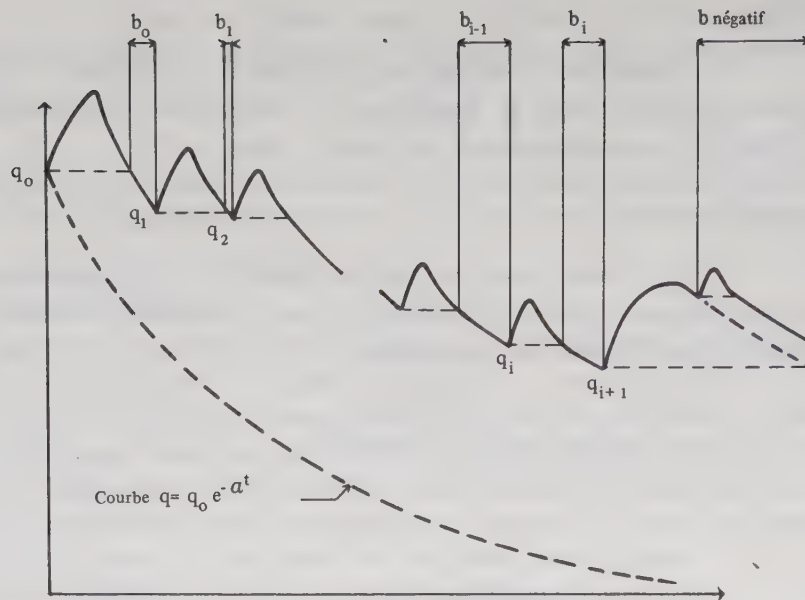


fig. 24

Autrement dit l'évolution du processus est fonction de b , et en fait c et b apparaissent comme les variables fondamentales du modèle, si on considère qu'en pratique v représente une faible fraction des volumes écoulés.

Dans ces conditions il serait intéressant de considérer la variable b par elle-même plutôt que comme la différence algébrique $c - a$. Malheureusement la distribution de b ne semble pas s'ajuster à une loi classique, tout en étant peu éloignée d'une loi normale.

D'autre part b est légèrement corrélée à c (coefficient de corrélation $\log c$, $b = 0,26$). Enfin il y a la contrainte $b < c$, dont la prise en compte paraît difficile.

En définitive, dans la mesure du possible, il faudrait éviter de recourir à cette variable b , ce qui *a priori* est possible dans le cas de génération de données où b pourrait se définir simplement comme la différence $c - a$.

En fait, dans certains développements probabilistes, nous serons amenés à l'utiliser et nous poserons alors l'approximation que cette variable est distribuée normalement et est indépendante de c .

25 — LA LOI DU TARISSEMENT

Revenons maintenant sur le problème de l'estimation de l'exponentielle de tarissement. La meilleure estimation du coefficient a de l'exponentielle nous semble être celle qui doit conduire à la conclusion suivante : partant d'un certain débit q_0 à un instant initial t_0 , la probabilité de parvenir à un débit q_i (tel que défini au § précédent) au bout d'un temps t_i doit être la même pour le processus réel et pour le modèle. Considérons maintenant au lieu des débits, les logarithmes de ces débits ; les segments d'exponentielle se trouvent remplacés par des segments de droite de pente $-a$. Posons $d_i = \log q_{i+1} - \log q_i$.

La condition définie ci-dessus peut se traduire par l'expression :

$$\sum d_i = a \sum b_i$$

Nous calculerons donc pratiquement la valeur moyenne de a par le rapport :

$$a = \frac{\sum |d_i|}{\sum b_i}$$

dans lequel nous ne considérons évidemment que les $b > 0$ (et par conséquent les d négatifs) puisque les $b < 0$ sont reconstitués précisément à partir de la valeur trouvée pour a .

Une telle définition de la courbe de tarissement n'est évidemment pas très satisfaisante du point de vue physique, mais c'est la meilleure pour notre modèle, qui est un modèle statistique, faisant certes intervenir des phénomènes physiques, mais devant également tenir compte des erreurs de mesure et surtout de l'erreur consistant à remplacer le processus continu des débits par la suite discontinue des moyennes journalières. (En effet, lorsque nous posons par exemple $b = 2$, il se peut que dans le processus réel, nous ayons $b = 1,5$ ou $b = 2,5$).

26 – AUTOCORRELATIONS ET VARIATIONS SYSTEMATIQUES DANS LE TEMPS

Les variables c et a ne présentent pas d'autocorrélation significative; v et h présentent une autocorrélation faible mais significative (coefficients 0,28 et 0,34 pour 131 couples d'observations).

Il est probable que les différentes variables subissent une variation systématique dans le temps mais, cette tendance éventuelle est masquée par les variations aléatoires. Il est possible notamment que l'autocorrélation de v et h résulte partiellement ou totalement de leur variation systématique.

Jusqu'à nouvel ordre nous ferons abstraction de ces phénomènes et supposerons que le processus est stationnaire.

27 – DEMARRAGE DU PROCESSUS

Il convient maintenant de revenir sur ce problème évoqué au § 23, dans lequel nous avons défini une convention provisoire. Si nous conservons cette convention, nous devons considérer deux nouvelles variables aléatoires : le débit initial q_0 et la date de départ du processus t_0 .

Il est évidemment plus simple de partir soit d'un débit fixe, soit d'une date fixe.

27.1 – HYPOTHESE : " q_0 " CONSTANT

Cette solution simplifie les premiers développements mathématiques du modèle et permet en outre de prendre en compte les risques d'étiages précoces, ce qui peut présenter un certain intérêt pratique. (Problèmes de débits garantis).

Il s'agit alors de choisir une valeur q_0 et de déterminer la loi de probabilité de t_0 . Le débit q_0 choisi peut évidemment survenir plusieurs fois par an, ce qui nécessite une convention précise dans le choix de t_0 . Après divers tâtonnements nous avons adopté les règles suivantes :

- q_0 est le module interannuel à la station, soit $4,33 \text{ m}^3/\text{s}$ pour l'Hers à Peyrat,
- t_0 est la date à laquelle le débit journalier moyen descend au-dessous de q_0 pour la première fois à partir du 1er mai.

Les 6 observations dont nous disposons pour t_0 ne nous permettent pas d'établir la loi de probabilité de cette variable. Il est nécessaire pour cela d'effectuer des comparaisons avec des stations voisines pour lesquelles on dispose de longues séries d'observation.

Les valeurs de t_0 relatives à deux autres stations voisines, l'Ariège à Foix et le Salat à Kercabanac, ont des distributions empiriques qui s'ajustent bien à des lois de Pearson ne différant entre elles que par la valeur de la borne inférieure de la variable. Autrement dit, il n'est pas absurde de supposer que les lois de t_0 pour différentes stations de la région suivent la même loi de probabilité, à un décalage près dans le temps. Nous supposons donc que cette loi s'applique notamment à l'Hers à Peyrat ; il suffit alors d'estimer le décalage moyen dans le temps existant entre t_0 à cette station et les valeurs de t_0 à Kercabanac par exemple, pour estimer la loi de t_0 à Peyrat.

27.2 – HYPOTHESE : “ t_0 ” CONSTANT

L'hypothèse précédente s'est révélée présenter un défaut important sur le plan pratique : l'étroitesse de l'aire géographique sur laquelle elle est applicable, et qui n'intéresse que les hauts bassins de la Garonne et de l'Aude. En effet dans le cas d'autres bassins de la région il s'avère impossible de trouver un débit q_0 permettant de définir tous les ans une valeur de t_0 en fin de printemps ou début d'été.

Nous nous sommes donc intéressés à l'hypothèse plus souple de t_0 constant. Il faut choisir une date aussi précoce que possible pour que le modèle ait le champ d'application maximum, mais suffisamment tardive pour que le modèle puisse certainement s'appliquer à partir de cette date dans l'hypothèse de la stationnarité. Pour le haut bassin de la Garonne, nous avons adopté la date du 15 juin.

Des considérations théoriques qui seront exposées dans le chapitre suivant nous amènent à définir q_0 comme le débit initial de la dernière “réaction” précédant t_0 (débit du même type que les débits q_i de la fig. 24). Les mêmes raisons théoriques, comme nous le verrons ultérieurement, conduisent à retenir pour la loi de probabilité de q_0 la loi log-normale. On observe d'ailleurs effectivement que pour q_0 à Kercabanac par exemple le test graphique et le test du χ^2 sont favorables à l'hypothèse d'une distribution log-normale.

D'autre part il existe une corrélation étroite entre q_0 à Kercabanac et q_0 à Peyrat, (coefficient 0,948), ce qui nous permet de donner une expression vraisemblable pour la loi de q_0 à Kercabanac, bien que nous ne disposions que de 6 observations pour cette variable. Ainsi la moyenne de $\log q_0$ est estimée à 1,123 et la variance à 0,182.

Nous disposons maintenant d'une hypothèse vraisemblable et assez souple pour démarrer le processus, hypothèse qui sera utilisée dans certains développements probabilistes du chapitre suivant ainsi que dans la génération de données.

D'autre part il est possible d'envisager désormais des prévisions de débits à moyen terme. Pour cela il serait possible de rattacher q_0 à Kercabanac à différents facteurs hydrométéorologiques, par corrélations multiples comme cela se pratique de façon courante dans les services d'E.D.F. La corrélation existant entre q_0 de Kercabanac et q_0 de Peyrat devrait permettre dans ces conditions des prévisions de débit à Peyrat.

On pourrait être tenté de penser que si les valeurs de q_0 à Kercabanac et Peyrat sont étroitement liées, toutes les autres grandeurs hydrologiques dont on peut avoir besoin sont liées de la même façon. Si cela se vérifiait, le modèle que nous décrivons n'aurait guère d'intérêt car pour connaître la loi de probabilité d'une grandeur hydrologique quelconque à Peyrat, il suffirait de procéder par corrélation avec Kercabanac. En fait nous avons notamment vérifié à titre d'exemple que les débits moyens de juillet et août à ces deux stations sont liés par des coefficients respectifs de 0,52 et 0,71 seulement pour la série de données 1962 – 1967.

3 – TRAITEMENT DU MODELE PAR LE CALCUL DES PROBABILITES CLASSIQUES

Nous avons abordé le problème du volume écoulé entre deux dates déterminées, et pour commencer nous avons tenté d'établir la loi de probabilité du volume relatif à chaque réaction.

31 – PREMIERE APPROCHE DU PROBLEME

Il semble logique d'affecter à chaque réaction l'écoulement dont elle est responsable, ce qui conduit au découpage de la fig. 25, déterminé par les courbes de tarissement de chaque réaction. Cependant les volumes s'étendent sur une période infinie et lorsqu'il s'agit de les borner à une date donnée l'expression analytique obtenue est complexe.

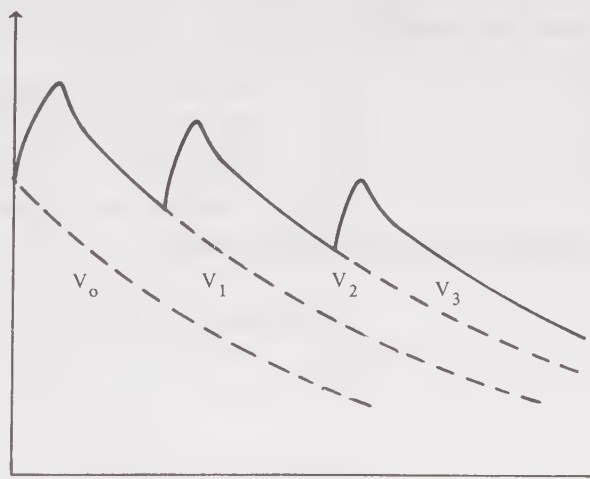
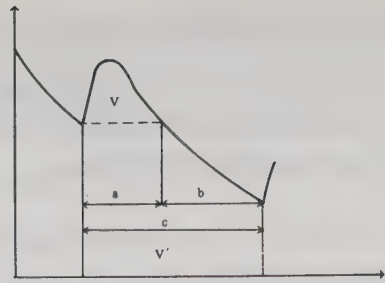


fig. 25

Nous avons donc choisi un découpage moins naturel mais conduisant à des expressions qui semblent *a priori* mieux exploitables (fig. 26).

fig. 26



Le volume relatif à la réaction de rang i est la somme du volume v_i , réalisation de la variable V , et d'un volume v_i' qui a pour expression :

$$v_i' = a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-1} (1 - e^{-a b_i}) / a$$

avec $q_{i-1} = q_0 \cdot e^{-a \sum_{j=1}^i b_j}$

Il convient donc d'établir d'abord les lois de probabilité de c , a , et $b = c - a$.

31.1 - LOI DE "c"

La probabilité au dépassement de $(c - 1,4)$ s'ajuste à une courbe exponentielle d'équation :

$$\varphi'(c - 1,4) = e^{-\frac{(c - 1,4)}{2,5}}$$

d'où la fonction de répartition de cette même variable :

$$F'(c - 1,4) = 1 - e^{-\frac{(c - 1,4)}{2,5}}$$

et sa densité de probabilité :

$$f'(c - 1,4) = \frac{1}{2,5} \cdot e^{-\frac{(c - 1,4)}{2,5}}$$

Soit C la variable aléatoire susceptible de prendre les valeurs c , $f(c)$ sa densité de probabilité, et $F(c)$ sa fonction de répartition :

Par définition des fonctions de répartition, nous avons :

$$F'(c - 1,4) = \text{Prob} [C - 1,4 < c - 1,4] = \text{Prob} [C < c] = F(c) \quad (45)$$

$$F(c) = \int_0^c f(C) dC \quad (46)$$

$$F'(c - 1,4) = \int_{1,4}^{c-1,4} f'(C - 1,4) \cdot d(C - 1,4) = \int_0^c f'(C - 1,4) dC \quad (47)$$

Dérivons par rapport à leur borne supérieure c les fonctions intégrales (46)
 et (47) : il vient :

$$f(c) = f'(c - 1,4)$$

d'où la densité de probabilité de c :

$$\left| \begin{array}{ll} f(c) = \frac{1}{2,5} e^{-\frac{(c-1,4)}{2,5}} & \text{pour } c \geq 1,4 \\ f(c) = 0 & \text{pour } c < 1,4 \end{array} \right.$$

31.2 - LOI DE "a" LIEE PAR "c"

Avec les caractéristiques de la liaison (c, a) définies au § 23, la loi conditionnelle $f(a | c)$ est une loi log-normale déterminée par les données :

$$\left| \begin{array}{l} E(\log a | c) = 0,79 \log(c - 1,4) + 0,44 \\ \text{Var}(\log a | c) = 0,16 \end{array} \right.$$

Nous obtenons donc pour densité de probabilité de la loi conditionnelle $(\log a | c)$:

$$g'(\log a | c) = \frac{1}{0,40\sqrt{2\eta}} \cdot e^{\frac{[-\log a - 0,79 \log(c - 1,4) - 0,44]^2}{0,32}}$$

Soit A la variable aléatoire susceptible de prendre les valeurs a , $g(a)$ sa densité de probabilité, $G(a)$ sa fonction de répartition, $G'(\log a)$ la fonction de répartition de $\log A$.

Par définition des fonctions de répartition, nous avons :

$$\left| G'(\log a) = \text{Prob}[\log A < \log a] = \text{Prob}[A < a] = G(a) \right. \quad (48)$$

$$\left| G(a) = \int_0^a g(A) dA \right. \quad (49)$$

$$\left| G'(\log a) = \int_0^{\log a} g'(\log A) d(\log A) = \int_0^a \frac{1}{A} g(\log A) dA \right. \quad (50)$$

En dérivant par rapport à leur borne supérieure a les fonctions intégrales (49)
 et (50) , il vient :

$$g(a) = \frac{1}{a} g'(\log a)$$

d'où la densité de la loi conditionnelle cherchée :

$$g(a | c) = \frac{1}{0,40 \sqrt{2\pi \cdot a}} \cdot e^{-\frac{[\log a - 0,79 \log(c - 1,4) - 0,44]^2}{0,32}}$$

31.3 – LOI DE “b” LIEE PAR “c”

Soit ω un domaine d'intégration appartenant au domaine d'existence du couple (c, a) , ω' le domaine transposé de ω dans le repère (c, b) , et $r(c, a)$ la densité de probabilité du couple (c, a) – Nous aurons :

$$\text{Prob}[(c, a) \in \omega] = \text{Prob}[(c, b) \in \omega']$$

autrement dit,

$$\iint_{\omega} r(c, a) \, dc \, da = \iint_{\omega'} r(c, c-b) \cdot \left| \frac{D(c, a)}{D(c, b)} \right| \, dc \, db$$

cette seconde intégrale étant égale, en explicitant, à :

$$\iint_{\omega'} r(c, c-b) \, dc \, db$$

$r(c, c-b)$ est donc la densité de probabilité du couple (c, b) , d'où la densité de probabilité de b :

$$h(b) = \int_{1,4}^{\infty} r(c, c-b) \, dc$$

Explicitons l'expression $r(c, c-b)$. Nous avons :

$$r(c, c-b) = f(c) \cdot g(c-b|c)$$

ce qui donne une équation de la forme :

$$r(c, c-b) = \frac{K}{c-b} \cdot e^{\frac{M \cdot [\text{Log}(c-b) + N \text{Log}(c-1,4) + Q]^2 - c}{2,5}}$$

K, M, N, Q étant des constantes.

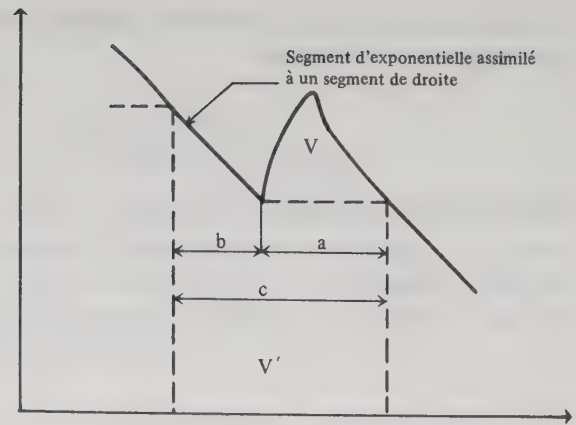
Malheureusement cette expression ne semble pas intégrable de façon analytique ce qui nous empêche de poursuivre le calcul visant à établir la loi de probabilité de V' .

32 – APPROCHE SIMPLIFIEE

Nous partons maintenant de l'hypothèse que b est indépendante de c , et que sa loi de probabilité est assimilable à la loi normale de moyenne 0,51 et de variance 3,16, moments calculés sur la distribution empirique de cette variable.

Cette hypothèse nous conduit à choisir un découpage des volumes un peu différent du précédent, et tel que l'expression de v_i' ne fasse intervenir que c et b :

fig. 27



En effet avec ce découpage, nous trouvons pour expression de v_i' :

$$v_i' = c_i q_i + \frac{b_i q_i}{2} (e^{a b_i} - 1)$$

$$\text{avec } q_i = q_0 \cdot e^{-a \sum_1^i b_j}$$

32.1 - LOI DE $\sum_1^i b_j$

Si nous supposons que les valeurs successives de b sont mutuellement indépendantes, $\sum_1^i b_j$ a pour densité de probabilité la loi normale, de moyenne $0,51 \cdot i$ et de variance $3,16 \cdot i$, soit :

$$l'(\sum_1^i b_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3,16 \cdot i}} \cdot e^{-\frac{(\sum b - 0,51 \cdot i)^2}{2 \cdot 3,16 \cdot i}}$$

$$32.2 - \text{LOI DE } d_i' = e^{-a \sum_1^i b_j}$$

Soit $\sum B_i$, la variable aléatoire susceptible de prendre les valeurs $\sum_1^i b_j$, $L'(\sum_1^i b_j)$ sa fonction de répartition, D_i' la variable susceptible de prendre les valeurs d_i' , $L(d_i')$ sa fonction de répartition $\ell(d_i')$ sa densité de probabilité. Par définition des fonctions de répartition, nous avons :

$$L'(\sum_1^i b_j) = \text{Prob}[\sum B_i < \sum_1^i b_j] = 1 - \text{Prob}[D_i' < d_i'] = 1 - L(d_i') \quad (51)$$

$$L'(\sum_1^i b_j) = \int_{-\infty}^{\sum_1^i b_j} \ell'(\sum B_i) d(\sum B_i) \quad (52)$$

$$L(d_i') = \int_{-\infty}^{d_i'} \ell(D_i') dD_i' = \int_{-\infty}^{\sum_1^i b_j} \ell(D_i') - a \cdot e^{-a \sum B_i} d(\sum B_i) \quad (53)$$

Dérivons par leur borne supérieure $\sum_1^i b_j$ les fonctions intégrales (52) et (53) ; nous obtenons en définitive :

$$\varrho' \left(\sum_1^i b_j \right) = a \cdot e^{-a \sum_1^i b_j} \cdot \varrho(d'_i)$$

d'où la densité de probabilité cherchée :

$$\varrho'(d') = \frac{1}{a\sqrt{2\pi \cdot 3,16 \cdot i}} \cdot e^{-\left(\frac{\log d' + 0,51 \cdot i}{2 \cdot 3,16 \cdot i}\right)^2 - \log d'}$$

pour $d' > 0$.

32.3 - LOI DE $p = cd'$

Nous posons que c et d' peuvent être considérées comme indépendantes (*). Soit ω un domaine d'intégration appartenant au domaine d'existence du couple (c, d') , ω' le domaine transposé de ω dans le repère (c, p) et $s(c, d')$ la densité de probabilité du couple (c, d') .

$$\text{Nous avons : } \text{Prob}[(c, d') \in \omega] = \text{Prob}[(c, b) \in \omega']$$

$$\text{autrement dit, } \iint_{\omega} s(c, d') \, dc \, d(d') = \iint_{\omega'} s\left(c, \frac{p}{c}\right) \left| \frac{D(c, d')}{D(c, p)} \right| \, dc \, dp$$

$$\text{qui est égal, en explicitant, à } \iint_{\omega'} \frac{1}{c} s\left(c, \frac{p}{c}\right) \, dc \, dp \qquad \frac{1}{c} \cdot s\left(c, \frac{p}{c}\right)$$

est donc la densité de probabilité du couple (c, p) , d'où la densité de probabilité de p :

$$k(p) = \int_{1,4}^{\infty} \frac{1}{c} \cdot s\left(c, \frac{p}{c}\right) \, dc$$

D'autre part, l'indépendance de c et d permet d'écrire :

$$s\left(c, \frac{p}{c}\right) = f(c) \cdot \varrho\left(\frac{p}{c}\right)$$

En définitive, l'expression de la loi du couple (c, p) est de la forme :

$$\frac{1}{c} \cdot r\left(c, \frac{p}{c}\right) = \frac{K}{c} \cdot e^{-(M \log \frac{p}{c} + N)^2 - \log \frac{p}{c} - Q(c-1,4)}$$

K, M, N, Q étant des constantes.

(*) — Si nous admettons l'approximation de l'indépendance entre c et b , *a fortiori* nous admettons celle de c et $\sum b$, et donc celle de c et d' .

Cette expression ne semble pas intégrable de façon analytique, et nous sommes arrêtés comme avec la méthode précédente.

33 – LIMITE DE L'ETUDE PROBABILISTE PAR LES METHODES CLASSIQUES

En supposant que par une méthode quelconque nous arrivions à obtenir ou approcher la loi de probabilité du volume relatif à chaque réaction, il resterait à en déduire celle de la somme de ces volumes pendant un intervalle de temps donné. Or il est évident que les volumes successifs ne sont pas mutuellement indépendants. Cette constatation semble rendre impossible la solution du problème avec les méthodes classiques utilisées jusqu'ici.

Nous allons donc utiliser une approche complètement différente basée sur la théorie des processus stochastiques, qui au lieu de nécessiter un découpage par tranches comme précédemment, permet de traiter le phénomène dans son ensemble. Le processus utilisé ici est d'un type particulier appelé "processus de renouvellement cumulatif" . [39] [40].

4 – TRAITEMENT DU MODELE PAR LA THEORIE DU RENOUVELLEMENT

41 – DEFINITION D'UN PROCESSUS SIMPLIFIE

Comme nous l'avons déjà signalé, les volumes complémentaires v relatifs à chaque crue représentent une proportion relativement faible des volumes écoulés ; en conséquence il est possible de traiter v comme un terme correctif qu'il suffit de connaître approximativement. Dans ces conditions nous adoptons un processus simplifié "en escalier" déduit du processus réel : fig. 28.

Les deux processus présentent en commun la suite des points $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ formant le début de chaque réaction. Nous allons maintenant travailler sur les débits q_γ du processus simplifié et le passage au processus réel sera fait *in fine* par l'intervention d'un terme correctif.

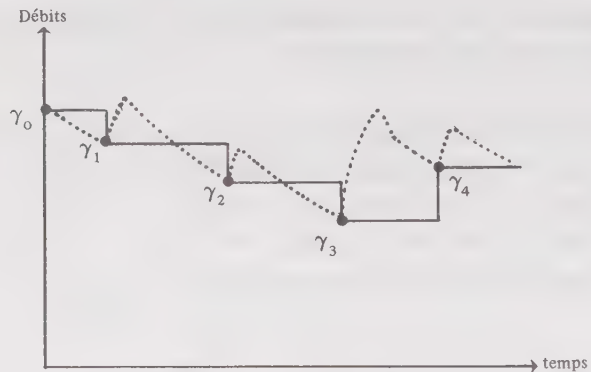


fig. 28

42 – DEFINITION D'UN PROCESSUS TRANSPOSE

Soient q_i , débit journalier au point γ_i , et b_i , réalisation de rang i de la variable b précédemment définie. Nous aurons :

$$q_i = q_0 \cdot e^{-a \sum_{j=0}^{i-1} b_j}$$

Cette expression nous suggère de nous intéresser aux logarithmes des débits.

Posons :

$$\begin{cases} \ell_i = \log q_i \\ d_i = \ell_{i+1} - \ell_i \end{cases}$$

Nous avons :

$$\begin{cases} \ell_i = \log q_0 - a \sum_{j=0}^{i-1} b_j \\ \ell_{i+1} = \log q_0 - a \sum_{j=0}^i b_j \end{cases}$$

d'où : $d_i = -a \cdot b_i$

En faisant l'approximation que b suit une loi de probabilité normale et est indépendante de c , d présente les mêmes propriétés.

l suit donc un processus constitué par des sauts successifs intervenant à des intervalles de temps mutuellement indépendants c , ces sauts ayant des hauteurs mutuellement indépendantes (fig. 29). C'est ce qu'on appelle un "processus cumulatif à accroissements indépendants" dans la théorie du renouvellement.

Nous allons chercher la loi de probabilité de l à une date donnée t , d'où nous déduirons la loi de probabilité du débit q_γ dans le processus simplifié, puis la probabilité de q dans le processus naturel.

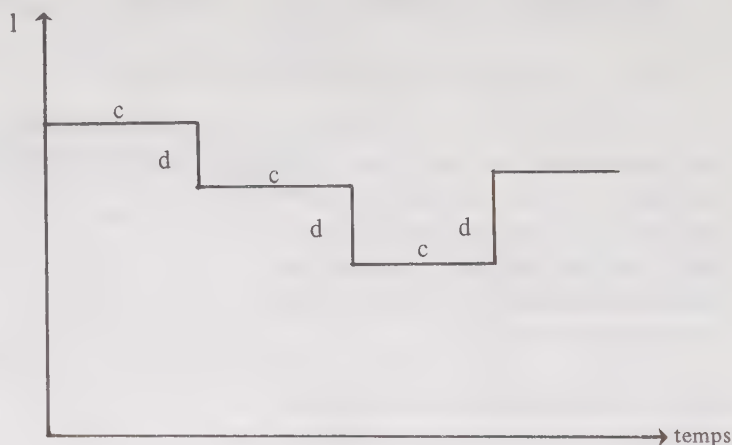


fig. 29

43 - LOI DU NOMBRE DE REACTIONS

Soit T_i le temps nécessaire à l'apparition de i événements consécutifs :

$$T_i = c_1 + c_2 + \dots + c_i$$

Soit $f(c)$ la densité de probabilité de c .

* $f_c(\tau)$ sa transformée de Laplace,

c'est-à-dire $\int_0^\infty e^{-\tau \cdot c} f(c) dc$.

$\theta_i(t)$ la densité de probabilité de T_i
 $*\theta_{t,i}(\tau)$ sa transformée de Laplace
 $\theta_i(t)$ la fonction de répartition de T_i

Suivant un théorème classique concernant la transformée de Laplace d'une somme de variables aléatoires indépendantes, nous pouvons écrire :

$$*\theta_{t,i}(\tau) = [*f_c(\tau)]^i \quad (54)$$

D'autre part nous avons la relation suivante liant le temps nécessaire à l'apparition de la i ème réaction et le nombre de réactions se produisant dans l'intervalle de temps t :

$$N_t < i \Leftrightarrow T_i > t$$

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} \text{Prob} [N_t < i] = \text{Prob} [T_i > t] = 1 - \Theta_i(t) \\ \text{Prob} [N_t < i + 1] = 1 - \Theta_{i+1}(t) \end{cases}$$

$$\text{et par conséquent} \quad \text{Prob} [N_t = i] = \Theta_i(t) - \Theta_{i+1}(t) \quad (55)$$

44 – UTILISATION DES PROPRIETES DU PROCESSUS CUMULATIF

Soit $g(d)$ la densité de probabilité des accroissements d , $*g_d(\delta)$ la fonction caractéristique de d .

Soit λ la variable aléatoire représentant l'accroissement total de l pendant la durée t , $h(\lambda, t)$ la densité de probabilité de λ , et $*h_\lambda(\delta, t)$ la fonction caractéristique de λ , c'est-à-dire l'espérance mathématique $E [\exp (i \delta \lambda)]$.

Pour $N_t = i$ donné, λ est la somme de i variables indépendantes identiquement distribuées d , par conséquent nous avons l'espérance mathématique conditionnelle :

$$E (e^{i\delta\lambda} \mid N_t = i) = [*g_d(\delta)]^i$$

d'où l'espérance mathématique marginale :

$$*h_\lambda(\delta, t) = E (e^{i\delta\lambda}) = \sum_{i=0}^{\infty} [*g_d(\delta)]^i \cdot \text{Prob} (N_t = i) \quad (56)$$

45 – CONDITIONS PARTICULIERES

Afin de simplifier la suite du calcul, nous allons adopter l'approximation suivante : les intervalles de temps c suivent une loi de probabilité exponentielle, dont l'espérance $1/\rho$ est prise égale à la moyenne empirique des observations, soit 4,25.

Dans cette hypothèse, la densité de probabilité s'écrit : $f(c) = \rho \cdot e^{-\rho c}$

$$\Rightarrow *f_c(\tau) = \frac{\rho}{\rho + \tau}$$

D'après la formule (54), nous aurons donc :

$$*\theta_{t,i}(\tau) = \left(\frac{\rho}{\rho + \theta} \right)^i$$

et la transformation réciproque fournit : $\theta_i(t) = \frac{\rho^i}{(i-1)!} \cdot c^{i-1} \cdot e^{-\rho c}$ (loi d'Erlang, cas particulier de la loi Γ).

D'où la probabilité $N_t = i$, en appliquant la formule (55) :

$$\text{Prob}(N_t = i) = \int_0^t \frac{\rho^i}{(i-1)!} \cdot c^{i-1} \cdot e^{-\rho c} - \int_0^t \frac{\rho^{i+1}}{i!} \cdot c^i \cdot e^{-\rho c}$$

En résolvant par parties la deuxième intégrale, il vient :

$$\text{Prob}(N_t = i) = \rho t^i \cdot e^{-\rho t} / i!$$

Expression que nous reportons dans l'équation (56) :

$$\begin{aligned} *h_\lambda(\delta, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} [*g_d(\delta)]^i \cdot \rho t^i \cdot e^{-\rho t} / i! \\ &= e^{-\rho t} \sum_{i=0}^{\infty} [\rho t \cdot *g_d(\delta)]^i / i! \\ &= e^{-\rho t} \cdot e^{\rho t \cdot *g_d(\delta)} \\ &= e^{\rho t \cdot *g_d(\delta) - \rho t} \end{aligned} \quad (57)$$

D'autre part, si nous posons que d a pour densité de probabilité la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ^2 , nous avons pour fonction caractéristique [42] :

$$*g_d(\delta) = e^{i\delta\mu} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 \delta^2}{2}}$$

En reportant cette expression dans (57), nous obtenons en définitive :

$$*h_\lambda(\delta, t) = e^{\rho t} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 \delta^2}{2} + i\delta\mu - \rho t}$$

expression dans laquelle δ est l'argument de transformation, t le temps pendant lequel l subit l'accroissement ayant pour fonction caractéristique $*h_\lambda(\delta, t)$, et ρ, μ, σ des paramètres déterminés empiriquement à partir des observations.

L'inversion permettant de passer de $*h_{\lambda}(\delta, t)$ à $h(\lambda, t)$ ne figure pas dans les tables et est probablement difficile à résoudre analytiquement. Nous nous contenterons donc de faire apparaître les moments de $h(\lambda, t)$.

Pratiquement, compte tenu de la forme de $*h_{\lambda}(\delta, t)$ il est plus simple de passer par la seconde fonction caractéristique :

$$\text{Log} [*h_{\lambda}(\delta, t)] = \rho t \cdot e^{-\frac{\sigma^2 \delta^2}{2} + i\delta\mu} - \rho t$$

dont le développement en série par rapport à δ nous donne : (58)

$$\text{Log} [*h_{\lambda}(\delta, t)] = i\mu\rho t\delta - \frac{\rho t}{2}(\sigma^2 + \mu^2)\delta^2 - \frac{i\mu\rho t}{6}(\mu^2 + 3\sigma^2)\delta^3 + \frac{\rho t}{24}(\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4)\delta^4 + 0(\delta^4)$$

Posons :

$$\text{Log} [*h_{\lambda}(\delta, t)] = i\delta c_1 + \frac{(i\delta)^2}{2} \cdot c_2 + \frac{(i\delta)^3}{6} \cdot c_3 + \frac{(i\delta)^4}{24} c_4 + 0(\delta^4) \quad (59)$$

(les coefficients c_1, c_2, c_3, c_4 , étant les "cumulants" de la variable λ) [42].

Considérons la moyenne m' et les premiers moments centrés μ'_2, μ'_3, μ'_4 de λ .

$$\begin{aligned} \text{Nous avons : } *h_{\lambda}(\delta, t) &= E(e^{i\delta\lambda}) \\ &= e^{i\delta m'} \cdot E[e^{i\delta(\lambda - m')}] \\ &= e^{i\delta m'} \cdot *k_{\lambda}(\delta, t) \end{aligned} \quad (60)$$

$*k_{\lambda}(\delta, t)$ étant la fonction caractéristique de la variable centrée $\lambda - m$.

Suivant un théorème général cette fonction se développe de la façon suivante en fonction des moments :

$$*k_{\lambda}(\delta, t) = 1 - \frac{\mu'_2}{2} \cdot t^2 - \frac{i\mu'_3}{6} \cdot t^3 + \frac{\mu'_4}{24} \cdot t^4 + 0(t^4) \quad (61)$$

L'équation (60) conduit d'autre part à :

$$\text{Log} [*h_{\lambda}(\delta, t)] = i\delta m' + \text{Log} [*k_{\lambda}(\delta, t)]$$

En appliquant à la relation (61) le développement en série du type :

$$\text{Log}(1-u) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u^j}{j}$$

nous obtenons : $\text{Log} [*h_{\lambda}(\delta, t)] = i \delta m' - \left(\frac{\mu_2'}{2} \cdot \delta^2 + \frac{i\mu_3'}{6} \cdot \delta^3 - \frac{\mu_4'}{24} \cdot \delta^4 \right) - \frac{\mu_2'^2}{8} \cdot \delta^4 + 0(\delta^4)$

et en identifiant avec (59) :

$$\begin{cases} c_1 = m' \\ c_2 = \mu_2' \\ c_3 = \mu_3' \\ c_4 = \mu_4' - 3 \mu_2'^2 \end{cases} \quad (62)$$

Ainsi la moyenne et les premiers moments centrés de λ s'écrivent, par identification de (58), (59) et (62) :

$$\begin{cases} m' = \mu \rho t \\ \mu_2' = (\mu^2 + \sigma^2) \rho t \\ \mu_3' = (\mu^2 + 3 \sigma^2) \rho t \\ \mu_4' = (\mu^4 + 6 \mu^2 \sigma^2 + 3 \sigma^4) \rho t + 3 (\mu^2 + \sigma^2)^2 \rho^2 t^2 \end{cases} \quad (63)$$

Un calcul numérique préliminaire effectué avec quelques valeurs de t nous montre que le coefficient d'asymétrie γ_1 égal à $\mu_3' / \mu_2'^{3/2}$ est très petit ($< 10^{-3}$ pour $t = 1$) et tend vers 0 lorsque t s'accroît, et que le coefficient d'aplatissement $\gamma_2 = \frac{\mu_4'}{\mu_2'^2} - 3$ est également faible et tend aussi vers 0 lorsque t s'accroît.

Dans ces conditions, nous sommes fondés à poser l'approximation que la loi de λ est la loi normale de moyenne $\mu \rho t$ et de variance $(\mu^2 + \sigma^2) \rho t$.

47 – LOI CONDITIONNELLE DES DEBITS DU PROCESSUS SIMPLIFIE

Rappelons que λ défini dans le processus transposé représente la différence $\lambda = l_t - l_0 = \log q_{\gamma, t} - \log q_0$ où q_0 et $q_{\gamma, t}$ sont les débits à l'instant initial et à l'instant t dans le processus simplifié.

L'expression (64) peut également s'écrire :

$$\log (q_{\gamma, t} / q_0) = \lambda \quad \text{ou} \quad q_{\gamma, t} = q_0 \cdot e^{\lambda} \quad (65)$$

ce qui nous montre que $q_{\gamma, t} / q_0$ suit une loi de probabilité log-normale. Nous obtenons ainsi la loi conditionnelle de $q_{\gamma, t}$ pour q_0 donné.

48 – LOI MARGINALE DES DEBITS DU PROCESSUS SIMPLIFIE

En théorie, la recherche de cette loi pourrait se concevoir de deux façons différentes :

- étude des propriétés asymptotiques de la loi conditionnelle de $q_{\gamma,t}$ lorsque $t \rightarrow \infty$
- combinaison de la loi de probabilité de q_0 avec la loi conditionnelle de $q_{\gamma,t}$

La première méthode nous permet d'obtenir des conclusions intéressantes concernant la forme de la loi cherchée. On démontre de façon rigoureuse [38] que λ tend vers une loi normale lorsque $t \rightarrow \infty$. En pratique, il nous suffira de constater en examinant (63) que $\gamma_1 \rightarrow 0$ et $\gamma_2 \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, comme nous l'avons déjà indiqué. Cela nous autorise à proposer la loi log-normale pour q_0 (hypothèse qui s'est avérée plausible d'après l'examen de valeurs empiriques de q_0 , cf § 27), et de façon générale pour $q_{\gamma,t}$. Nous obtenons ainsi un système cohérent dans lequel lois conditionnelles et lois marginales sont normales dans le processus transposé, et par conséquent log-normales dans le processus simplifié.

La deuxième méthode nous permet d'obtenir l'expression numérique de la loi marginale. Connaissant la loi de q_0 (§ 27), nous en déduisons la loi de $q_{\gamma,t}$ en passant par l'intermédiaire du processus transposé dans lequel nous avons : $l_t = l_0 + \lambda$ (§ 47), somme de deux variables supposées indépendantes. Par conséquent moyenne et variante de l_t sont les sommes des moyennes et des variances de l_0 et λ .

Cette méthode n'est évidemment plus utilisable lorsqu'on travaille sur une station de jaugeage très isolée pour laquelle on ne peut estimer correctement q_0 en se rattachant à une autre station. Nous pensons que dans ce cas, il est rationnel de procéder de la façon suivante. On considère le nuage de points formé par les valeurs empiriques de l , dans le système de coordonnées (temps, logarithme des débits). La droite de régression de l par rapport au temps représente la meilleure estimation de la moyenne de l en fonction du temps, compte tenu de l'information dont on dispose. D'autre part, la variance résiduelle par rapport à cette droite de régression varie théoriquement de façon linéaire avec le temps, d'après (63), et sa valeur moyenne dans l'intervalle de temps considéré peut être estimée par la variance résiduelle empirique. En définitive nous pouvons donc estimer la valeur moyenne et la variance de l pour la totalité de l'intervalle de temps considéré.

49 — LOIS DE PROBABILITE DES DEBITS JOURNALIERS

Pour passer des lois de probabilité du processus simplifié aux lois du processus réel, il va falloir tenir compte d'un terme correctif correspondant aux volumes complémentaires apportés par chaque "crue". Le volume complémentaire à prendre en compte n'est pas rigoureusement égal à V , mais légèrement inférieur (que l'on ait $b > 0$ ou $b < 0$), soit en moyenne à peu près $0,9.V$.

Il importe de rappeler que les volumes v ne constituent qu'une faible fraction des volumes écoulés totaux, et que la correction ainsi apportée représente environ 7% de ces volumes. Dans ces conditions il semble permis de raisonner de façon assez grossière sur ce facteur.

La hauteur supplémentaire h' que l'on doit ajouter à q_γ pour obtenir q sera prise égale en moyenne à $0,9 \bar{v}/\bar{c}$. Nous adopterons donc pour moyenne et pour variance de h' respectivement :

$$\left| \begin{array}{l} \bar{h}' = 0,9 \cdot \frac{\bar{v}}{\bar{c}} = 0,9 \cdot \frac{0,757}{4,25} = 0,16 \\ \text{Var } (h') = (0,9)^2 \cdot \frac{\text{Var } V}{(\bar{c})^2} = (0,9)^2 \cdot \frac{5,34}{(4,25)^2} = 0,24 \end{array} \right.$$

Nous poserons d'autre part que h' est une variable indépendante de q_γ et que par conséquent :

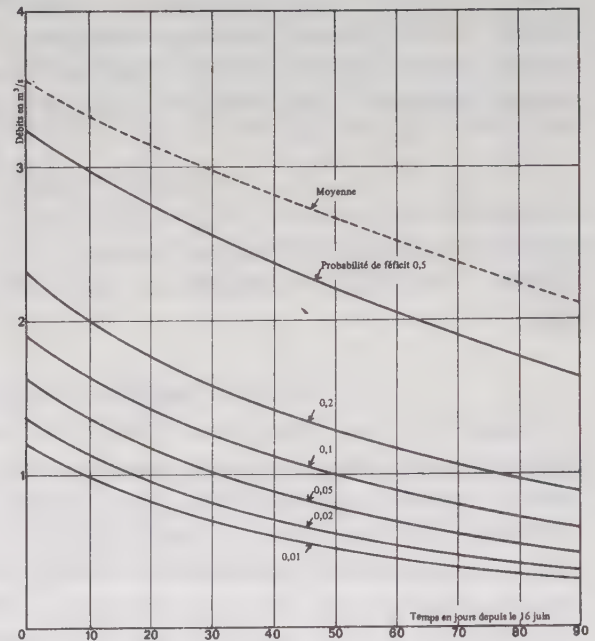
$$\begin{cases} \bar{q} = \bar{q}_\gamma + \bar{h}' \\ \text{Var}(q) = \text{Var}(q_\gamma) + \text{Var}(h') \end{cases}$$

Nous supposons enfin que le facteur correctif ne modifie que très peu la forme de la distribution, et qu'ainsi q suit une loi log-normale comme q_γ .

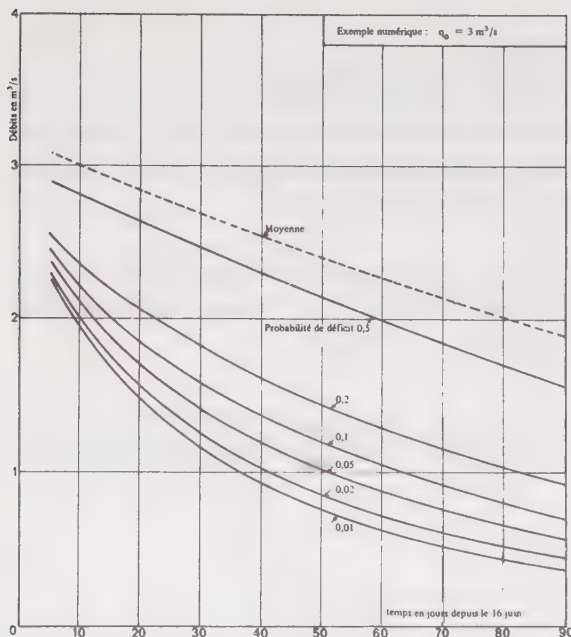
Nous avons en définitive tous les éléments pour calculer l'expression numérique des lois de probabilité de q , lois marginales et lois conditionnelles, et de calculer par exemple des quantiles. Les graph. 28 et 29 représentent les résultats obtenus à Peyrat pour la loi marginale calculée en utilisant la loi de q_0 , et pour la loi conditionnelle avec l'exemple numérique $q_0 = 3 \text{ m}^3/\text{s}$.

Il convient de remarquer que pour la loi conditionnelle, l'hypothèse log-normale

graph. 28



graph. 29



n'est pas réaliste. En effet dans cette hypothèse il est possible que partant d'un débit quelconque q_0 , le débit du lendemain soit aussi proche que l'on veut de 0. Cette anomalie provient essentiellement du fait que nous avons assimilé la loi de "c" à une loi exponentielle, ce qui autorise théoriquement cette variable à prendre des valeurs aussi petites que l'on veut. Par conséquent, dans un intervalle de temps donné nous avons un nombre illimité de réalisations de "c", et la vitesse à laquelle le débit peut tendre vers 0 est elle aussi illimitée.

Dans ces conditions nous avons remplacé la loi log-normale par une loi de GALTON, en imposant au débit à chaque instant une borne inférieure fournie par l'«exponentielle» hypothétique de tarissement

qui aurait pu être observée s'il n'y avait eu aucune réaction à partir de l'instant initial. Cette façon de faire détruit l'homogénéité mathématique du modèle, mais semble *a priori* plus réaliste. La différence entre les résultats obtenus pour le calcul des quantiles dans l'hypothèse log-normale et dans l'hypothèse de GALTON est importante pour les faibles délais de prévision, mais devient pratiquement négligeable au-delà d'un mois.

Notons encore, au sujet de la loi conditionnelle, que le débit initial q_0 est non pas le débit du jour dont on part, mais le débit " q_γ " de ce jour, autrement dit le dernier débit minimum relatif avant cette date. C'est ce qui explique notamment que la courbe des débits moyens dans la loi conditionnelle (graph. 29) ait une ordonnée à l'origine supérieure à q_0 .

Cette loi conditionnelle a pour principal intérêt de permettre soit des prévisions à court terme lorsqu'on se trouve au-delà du 15 juin, soit des prévisions à moyen terme en utilisant la corrélation multiple liant q_0 aux facteurs météorologiques, question évoquée au § 27.

En ce qui concerne aussi bien la loi marginale que la loi conditionnelle, il faut noter en toute rigueur que les résultats obtenus représentent certainement mieux les lois de la moyenne de 4 ou 5 jours consécutifs que les lois du débit journalier, compte tenu de la façon dont nous avons estimé le terme correctif h' . L'erreur commise est certainement négligeable du moins pour les bas débits et en pratique cette façon de procéder ne fait qu' "émousser" les pointes de crues, qui ne nous intéressent guère puisque le modèle ne vise à décrire que les étiages, du moins dans l'immédiat.

4.10 – LOI DE PROBABILITE DES "VOLUMES" ECOULES

Nous pouvons approcher la loi des volumes écoulés dans un intervalle de temps donné de la façon suivante. La loi de probabilité de q un jour donné est très voisine de la loi du débit moyen sur un intervalle de temps situé de part et d'autre de ce jour, pourvu que cet intervalle soit suffisamment petit. Jusqu'à plus ample informé, et comme cela est justifié au paragraphe précédent, nous considérons que l'on peut prendre un intervalle de 5 jours avec une précision suffisante. Ainsi par exemple en composant les lois de probabilité des débits moyens de trois séries de 5 jours successives nous pourrions trouver la loi de probabilité du débit moyen de 15 jours consécutifs. Ce résultat, obtenu pour le processus simplifié des débits q_γ sera transposé au processus réel par l'intervention d'un terme correctif.

Par mesure de simplification, nous raisonnerons désormais sur les débits moyens plutôt que sur les volumes.

Il convient d'établir d'abord les formules permettant d'effectuer la composition des débits moyens élémentaires successifs. Nous prendrons l'exemple de trois débits x , y , z , et nous poserons $s = x + y + z$ (le débit moyen de la quinzaine, que nous cherchons, sera donc égal à $s/3$).

Soit $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$, les densités de probabilité marginales de x , y , z , $g(y|x)$ la probabilité conditionnelle de y connaissant x , $h(z|y)$ la probabilité conditionnelle de z connaissant y . Nous utiliserons également la densité de probabilité à trois dimensions $r(x, y, z)$ pour les raisonnements.

Appelons m_x , m_y , m_z , m_s les moyennes de x , y , z , s , $m_{y|x}$ moyenne conditionnelle de y liée par x , et $m_{z|y}$ moyenne conditionnelle de z liée par y .

$$\text{Nous avons suivant un théorème connu : } m_s = m_x + m_y + m_z \quad (66)$$

Appelons n_x , n_y , n_z , $n_{y|x}$, $n_{z|y}$, n_s les moments du second ordre des mêmes variables.

Entre les 6 lois de probabilité définies plus haut, nous avons les cinq relations suivantes :

$$f(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty r(x, y, z) dy dz \quad (67)$$

$$g(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty r(x, y, z) dx dz \quad (68)$$

$$h(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty r(x, y, z) dx dy \quad (69)$$

$$r(x, y, z) = f(x) \cdot g(y|x) \cdot h(z|y) \quad (70)$$

$$g(y) = \int_0^\infty f(x) \cdot g(y|x) dx \quad (71)$$

Nous allons calculer le moment n_s

$$n_s = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s^2 \cdot r(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{avec } s^2 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\text{d'où } n_s = A + B + C + 2D + 2E + 2F \text{ avec :}$$

$$A = \iiint x^2 r dx dy dz$$

$$B = \iiint y^2 r dx dy dz$$

$$C = \iiint z^2 r dx dy dz$$

$$D = \iiint xy r dx dy dz$$

$$E = \iiint yz r dx dy dz$$

$$F = \iiint zx r dx dy dz$$

Nous avons d'abord :

$$A = n_x \quad , \quad B = n_y \quad , \quad C = n_z$$

Calculons maintenant les expressions contenant des produits de variables :

$$D = \iiint xy \, r \, dx \, dy \, dz = \int_0^\infty x f(x) \, dx \int_0^\infty y \cdot g(y|x) \, dy \int_0^\infty h(z|y) \, dz$$

par application de (70), d'où :

$$D = \int_0^\infty x f(x) \, dx \int_0^\infty y g(y|x) \, dy = \int_0^\infty x \cdot m_{y|x} f(x) \, dx$$

La formule (65) du § 47 nous montre que la moyenne conditionnelle est proportionnelle à la valeur de la variable de départ, c'est-à-dire que nous pouvons poser : $m_{y|x} = \theta \cdot x$; θ étant indépendante des valeurs de x et de y et ne dépendant que de l'intervalle de temps connu séparant les centres de deux périodes successives.

$$\text{Il vient donc : } D = \theta \cdot \int_0^\infty x^2 f(x) \, dx = \theta_{nx}$$

Ensuite, en ce qui concerne E :

$$E = \iiint yz \, r \, dx \, dy \, dz = \int_0^\infty f(x) \, dx \cdot \int_0^\infty y \cdot g(y|x) \, dy \cdot \int_0^\infty z \cdot h(z|y) \, dz$$

$$\text{par application de (70) d'où : } E = \int_0^\infty f(x) \, dx \int_0^\infty y \cdot m_{z|y} \cdot g(y|x) \, dy$$

$$\text{Nous avons } m_{z|y} = \theta \cdot y ; \text{ il vient donc : } E = \theta \cdot \int_0^\infty f(x) \cdot n_{y|x} \, dx$$

La formule (65) du § 47 montre que le moment conditionnel du deuxième ordre est proportionnel au carré de la valeur de la variable de départ ; nous poserons donc : $n_{y|x} = \zeta \cdot x^2$ d'où

$$E = \theta \cdot \zeta \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \theta \cdot \zeta \cdot n_x$$

Enfin, en ce qui concerne F :

$$F = \iiint zx \, r \, dx \, dy \, dz = \int_0^\infty x \cdot f(x) \, dx \int_0^\infty g(y|x) \, dy \int_0^\infty z \cdot h(z|y) \, dz \text{ par application de (70) d'où}$$

$$F = \int_0^\infty x \cdot f(x) \, dx \int_0^\infty g(y|x) \cdot m_{z|y} \, dy$$

$$= \theta \cdot \int_0^\infty x \cdot f(x) \, dx \int_0^\infty y \cdot g(y|x) \, dy$$

$$= \theta \cdot \int_0^\infty x \cdot m_{y|x} \cdot f(x) \, dx$$

$$= \theta^2 \cdot n_x$$

En définitive, le moment du deuxième ordre de s s'écrit donc :

$$n_s = n_x (1 + 2\theta + 2\theta\xi + 2\theta^2) + n_y + n_z \quad (72)$$

A partir de (66) et (72) nous pouvons obtenir $\text{Var}(s)$.

A $m_s/3$ et $\text{var}(s)/9$ nous ajoutons la moyenne et la variance du supplément de débit dû aux crues pour obtenir la moyenne et la variance du débit moyen de la quinzaine.

Pour calculer grossièrement les moments de ce terme correctif, nous observons qu'il y a dans une période de t jours, en moyenne $t/4,25$ réactions mutuellement indépendantes. Le terme correctif pour l'ensemble de la période a donc pour moyenne $0,9 \bar{v} \cdot t/4,25$ et pour variance approximative $(0,9)^2 \text{Var}(v) \cdot t/4,25$. Ces paramètres deviendront, pour le débit moyen de t jours :

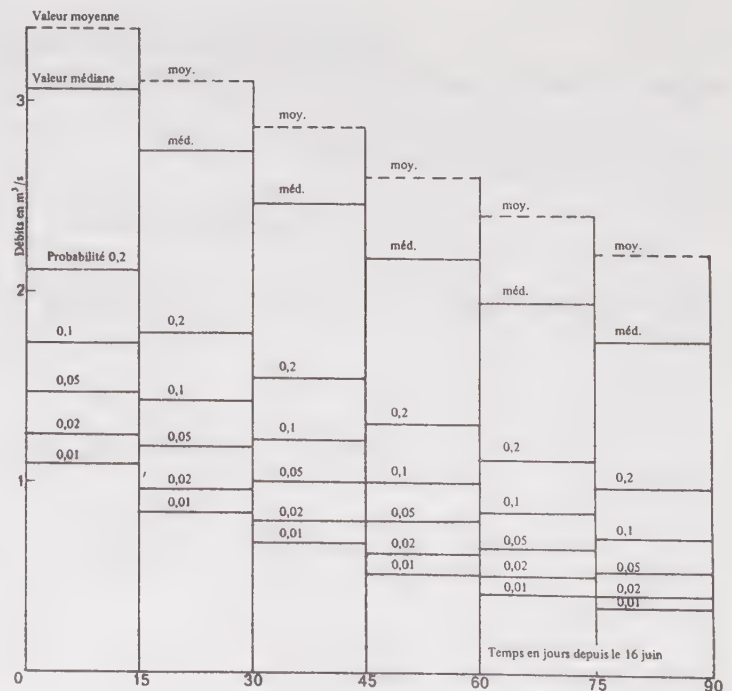
$$\left| \begin{array}{l} \text{Moyenne} : \frac{0,9 \cdot \bar{v} \cdot t}{4,25} \cdot \frac{1}{t} \\ \text{Variance} : \frac{(0,9)^2 \cdot \text{Var}(v) \cdot t}{4,25} \cdot \frac{1}{t^2} \end{array} \right.$$

Nous obtenons pour moyenne 0,16 et pour variance, sur 15 jours, 0,07.

La faible valeur de la variance obtenue justifie *a posteriori* la grossièreté du raisonnement précédent, mieux encore que dans le cas du calcul de la loi des débits journaliers.

Nous supposons que cette loi du débit moyen sur 15 jours est encore log-normale ce qui est conforme aux hypothèses habituelles en la matière qui proposent cette forme de loi même pour les débits mensuels.

Dans ces conditions nous pouvons donner une expression numérique à la loi de probabilité cherchée et calculer par exemple des quantiles. Le graph. 30 représente des quantiles de la loi marginale des débits de 15 jours à Peyrat. Le même calcul pourrait s'appliquer à la loi des volumes conditionnels connaissant q_0 .



graph. 30

5 – VERIFICATION DU MODELE – CONCLUSION

51 – APPLICATION A UNE LONGUE SERIE D'OBSERVATIONS

Le modèle a été construit sur six années d'observations, ce qui est insuffisant pour se rendre compte s'il est fidèle au processus réel des débits.

Cette vérification exige l'ajustement du modèle sur un nombre d'années d'observations très supérieur. Nous avons utilisé la station non perturbée la plus proche, pour laquelle existe une série de données suffisantes.

Il s'agit de Kercabanac sur le Salat [29] [30], pour laquelle nous disposons de 28 ans d'observations homogènes (1940 – 1967).

Le développement du modèle sur cette nouvelle station fait apparaître une différence très importante entre les résultats qu'il fournit et les résultats empiriques. La comparaison effectuée sur les logarithmes des débits laisse apparaître que l'ajustement de la moyenne est passable, mais que l'écart-type donné par le modèle est dans l'ensemble très supérieur à l'écart-type empirique.

En transposant ces observations des logarithmes aux débits naturels, il en résulte que la moyenne et l'écart-type donnés par le modèle sont exagérés, et que seul le débit médian est à peu près acceptable.

La différence entre les observations et le modèle semble trop important pour que ce dernier soit pratiquement utilisable, tout au moins dans le cas des rivières pyrénéennes pour lesquelles il a été mis au point.

52 – RAISONS DE L'INADEQUATION DU MODELE DE RENOUVELLEMENT

L'explication de cette anomalie réside dans l'autocorrélation négative qui existe entre les valeurs successives de la variable "d" du § 42. Il semble qu'on ne sache pas prendre en compte une telle autocorrélation dans le développement du processus de renouvellement cumulatif. Cela va ressortir de l'étude de certaines conséquences du modèle autorégressif, qui, lui, montre une bonne adéquation aux observations et a pour corollaire une telle autocorrélation négative de d.

Considérons trois valeurs successives y_1 , y_2 , y_3 , de la variable y, variable centrée réduite du processus autorégressif (§ 24.3 de la rédaction principale).

Posons $d'_1 = y_2 - y_1$ et $d'_2 = y_3 - y_2$. d' résulte d'un changement de variable linéaire effectué sur d, par conséquent les raisonnements concernant les corrélations sont les mêmes sur ces deux variables. Soient enfin r_1 et r_2 les coefficients d'autocorrélation respectifs des couples de variables (y_1, y_2) , (y_2, y_3) . La formule (6) (§ 22.3 de la rédaction principale) devient :

$$\begin{cases} y_2 = r_1 y_1 + \sqrt{1 - r_1^2} \cdot u_1 \\ y_3 = r_2 y_2 + \sqrt{1 - r_2^2} \cdot u_2 \end{cases}$$

Nous pouvons exprimer alors d_1 et d_2 en fonction d'une variable commune, y_2 par exemple :

$$\begin{cases} d_1 = (1 - r_1) y_2 + \sqrt{1 - r_1^2} \cdot u_1 \\ d_2 = (r_2 - 1) y_2 + \sqrt{1 - r_2^2} \cdot u_2 \end{cases}$$

Cherchons maintenant la valeur de ρ , coefficient de corrélation liant d_1 et d_2 .

Développons d'abord l'expression de ce coefficient de corrélation :

$$\rho = \frac{\text{cov}(d_1, d_2)}{\sqrt{\text{Var}(d_1) \cdot \text{Var}(d_2)}} \quad (73)$$

Développons à son tour la covariance, en tenant compte du fait que la loi de y est une loi réduite :

$$\begin{aligned} \text{cov}(d_1, d_2) &= E[(d_1 - \bar{d}_1) \cdot (d_2 - \bar{d}_2)] \\ &= E\left\{[(1 - r_1)(y_2 - \bar{y}_2) + \sqrt{1 - r_1^2} \cdot u_1] \cdot [(r_2 - 1)(y_2 - \bar{y}_2) + \sqrt{1 - r_2^2} \cdot u_2]\right\} \\ &= E[(1 - r_1) \cdot (r_2 - 1) \cdot (y_2 - \bar{y}_2)^2] \\ &= (1 - r_1) \cdot (r_2 - 1) \end{aligned}$$

Les variances de d_1 et d_2 valent respectivement :

$$\text{Var}(d_1) = (1 - r_1)^2 + (1 - r_1^2) = 2(1 - r_1)$$

$$\text{Var}(d_2) = (r_2 - 1)^2 + (1 - r_2^2) = 2(1 - r_2)$$

En reportant ces valeurs dans (73), il vient :

$$\rho = -\frac{1}{2} \sqrt{(1 - r_1)(1 - r_2)} \quad (74)$$

Il existe donc une autocorrélation négative entre les valeurs successives de d , autocorrélation non prise en compte dans le processus de renouvellement cumulatif.

Quel est l'ordre de grandeur du coefficient d'autocorrélation ? En moyenne nous trouvons : $r_1 = r_2 = R = 0,78$ ce qui donne $\rho = -0,11$.

Nous ne soupçonnions pas avant de faire l'étude ci-dessus qu'une autocorrélation aussi faible pouvait perturber totalement le comportement du processus de renouvellement cumulatif.

La conclusion générale que nous croyons devoir faire ressortir est que le *processus de renouvellement cumulatif* est extrêmement sensible à l'autocorrélation qui peut exister entre les valeurs successives de la variable que l'on cumule.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

INDEX DES ABREVIATIONS

"ERNUTH"	Centre d'Etude et de Recherches Nucléaires Thermiques et Hydrauliques (Electricité de France).
"G.H."	Groupe Hydrologie du Laboratoire National d'Hydraulique – Faculté des Sciences Montpellier.
"A.I.H.S."	Association Internationale d'Hydrologie Scientifique.
"S.H.F."	Société Hydrotechnique de France.
"BERKELEY"	Symposium Eaux de Surface – Assemblée Générale de Berkeley de l'Union Géodésique et Géophysique Internationale – 1963 – A.I.H.S.
"F. COLLINS"	Comptes rendus. Colloque International d'Hydrologie – 1967 – Colorado State University – Fort COLLINS – Colorado U.S.A.
"ENGREF"	Deuxième session de recyclage en Hydrologie – 1967 – Ecole Nationale du Génie Rural, des Eaux et des Forêts.
"ENPC"	Troisième session de recyclage en hydrologie – 1968 – Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

*
* * *

- [1] – CORMARY Y. 1967 – Etude du risque de concomitance entre les étiages et certains besoins en eau saisonniers. Quelques exemples concrets – *ENGREF*.
p. 4 définitions du concept d'étiage.
p. 8 calcul du risque de déficit en eau dans le cas de l'irrigation.
- [2] – REMENIERAS G. 1965 – L'hydrologie de l'Ingénieur – 2ème édition – Eyrolles – Paris.
Livre de base et d'initiation à l'hydrologie,
p. 313 définition des débits caractéristiques du régime d'un cours d'eau.
- [3] – CORMARY Y. 1967 – Problèmes de représentation et d'interprétation des débits de basses eaux du bassin de l'Allier – *G.H.*
Ensemble des problèmes soulevés en matière d'étude des étiages, et définition du programme de recherches du G.H. dans ce domaine, avec pour cadre concret le bassin versant de l'Allier.
- [4] – DAUTY J. 1967 – Estimation des débits d'étiage à partir des précipitations et des caractéristiques physiques du bassin versant – *G.H.*
Estimation de certaines caractéristiques des étiages à des emplacements où les mesures hydro-métriques sont rares ou absentes, par comparaison avec d'autres stations et en tenant compte des pluies et du complexe physique du bassin.
- [5] – GANNON J.J. 1963 – Definition of river drought flows characteristics – *Berkeley*.
Lois de probabilité des écoulements moyens minimaux sur un nombre de jours consécutifs donné. Extension des données relatives à de brèves séries d'observations par rattachement à de longues séries.
- [6] – HLAVEK R. 1967 – L'étude hydrologique des étiages – *ENGREF*.
Point des problèmes relatifs aux étiages et des différents types de recherches effectuées dans ce domaine.

- [7] – GOUBET A. 1967 – Méthodes de mesure des faibles débits d'étiage – *ENGREF*.
Exposé détaillé des méthodes de mesure des faibles débits, appuyé sur les expériences relatives au bassin de la Seine.
- [8] – CHORAFAS D.N. 1966 – La simulation mathématique et ses applications – *Dunod* – Paris.
p. 20 : Définition des modèles, et de la "simulation" qui, employée ici au sens large, est l'art de concevoir et d'exploiter les modèles.
Un chapitre est consacré aux principes de gestion sur ordinateur d'un réseau hydraulique complexe doté de plusieurs réserves.
- [9] – CORMARY Y. 1968 – Méthodes de recherche des relations entre précipitations et écoulements. Les modèles déterministes – *ENPC*.
Principes et mise au point des modèles déterministes appliqués à l'hydrologie. Exemples.
- [10] – LOBERT A. 1967 – Modèle probabiliste de base pour les pluies de 24 h – *G.H.*
Modèle de pluies journalières basé sur une chaîne de MARKOV, et exploité notamment par la théorie du renouvellement.
Introduction sur l'intérêt des modèles probabilistes.
- [11] – ROCHE M. 1963 – Hydrologie de surface – *Gauthier-Villars* – Paris.
Livre de base. Exemples d'application relatifs aux pays tropicaux. Le chapitre 7, consacré aux basses eaux comprend notamment :
– ajustement de lois de probabilité aux débits moyens minimaux d'un nombre donné de jours consécutifs ;
– modèle hydropluviométrique mensuel basé sur la méthode dite de la "charnière", particulièrement applicable aux régimes à saison sèche et saison humide bien tranchées ;
– "graphique de défaillances" : diagramme des courbes débits-fréquences, pour diverses durées de déficit et pour une station donnée.
p. 165 : Principe et utilisation de la pluie limite – d'après BOUCHARDEAU.
- [12] – HUFF F.A. & CHANGNON S.A. – 1963 – Relation between precipitation drought and low streamflow – *Berkeley*.
Distribution de fréquences des débits annuels en fonction de la pluviométrie, pour différents complexes physiques de bassins versants.
- [13] – YEDJEVICH V.M. 1963 – Patterns in sequence of annual riverflow and annual precipitation. *Berkeley*.
Analyse de séquences de débits moyens annuels (corrélogrammes). Rattachement aux pluies.
Rôle de l'évapotranspiration et des pertes atmosphériques sur les pluies.
- [14] – SNYDER W.M. 1963 – A water yield model derived from monthly runoff data – *Berkeley*.
L'écoulement d'un mois donné est divisé entre l'écoulement provenant des pluies de ce mois et l'écoulement différé provenant des pluies antérieures. Cette 2ème fraction est affectée d'un coefficient de réduction en fonction de l'ancienneté de la pluie et du complexe physique du bassin.
- [15] – KOSZ 1967 – Simulation of runoff for design of water resource systems – *F. Collins*.
Modèle de simulation de débits annuels et mensuels, utilisant pour établir un débit mensuel une régression linéaire par rapport au débit du mois précédent.
- [16] – HLAVEK R. 1969 – Exemple d'étude hydrologique d'un aménagement. Inédit. *Cours International d'Hydrologie et d'Aménagement des Eaux* – Paris.
p. 5 – Description d'un modèle hydrométrique mensuel utilisé par ROCHE M. pour un projet d'aménagement de l'Oued Massa (Maroc).
- [17] – QUIMPO R.G. & YEDJEVICH V.M. – 1967 – Stochastic description of daily river-flows – *F. Collins*.
Description probabiliste de la séquence des débits journaliers de la totalité de l'année par utilisation des techniques d'analyse harmonique.
- [18] – DUBAND D. 1968 – La corrélation en chaîne des débits journaliers – 10e journées de l'Hydraulique – *S.H.F.*
Analyse de la liaison des débits moyens journaliers successifs pour une saison donnée. Application à la prévision des débits journaliers à court terme.

- [19] – BEARD L.H. 1967 – Simulation of daily streamflow – *F. Collins*.
Modèle de simulation de débits mensuels, puis de débits journaliers utilisant une chaîne de MARKOV d'ordre 2.
- [20] – WISER E.H. 1967 – Stochastic models in hydrology – *Transactions of the ASAE* – vol. 10, n° 6.
Article comportant notamment un grand nombre de références bibliographiques et le développement de modèles de crues.
Traduit au G.H.
- [21] – LOBERT A. 1968 – Recherche des lois de probabilité des crues par la théorie du renouvellement – *G.H.*
Processus de crues définis à partir de niveaux de débits donnés, et assimilés à des processus poissonniens. Exploitation analytique par la théorie du renouvellement.
- [22] – ASTIER J. 1967 – Essai de construction de modèles probabilistes sur les étiages – *G.H.*
Processus de déficits en eau définis à partir de niveaux de débits donnés. Exploitation du même type que [21].
- [23] – PAYNE K., al. 1969 – Daily streamflow simulation. *Journal of the hydraulic division. Proceedings of the American Society of civil Engineers* ; july 1969.
Modèle de débits journaliers basé sur des hydrogrammes simplifiés. Applicable à un ensemble de stations voisines.
- [24] – BERNIER J. 1963 – La prévision statistique des bas débits – *Berkeley*.
Partant de la statistique des périodes de sécheresse, de la loi de probabilité des débits initiaux relatifs à ces périodes, et d'une courbe moyenne de tarissement, on peut obtenir les lois conditionnelle et marginale du débit minimum d'une période donnée.
- [25] – COCKELL C.J. & COLLE J.A. – 1967 – A mosaic technique for generating the daily pattern within a synthetic sequence – *F. Collins*.
Séquence de débits moyens mensuels, chaque mois étant ensuite analysé en une séquence de débits journaliers. Utilisation de la corrélation pluies-débits à l'échelle mensuelle et journalière.
- [26] – RIGGS H.C. Méthode de prévision des étiages – *Transactions, American Geographical Union*. Vol. 34 n° 3, janvier 1953.
Méthode de prévision basée sur des courbes de tarissement, l'évolution des débits de base, la fonte des neiges, le ruissellement, rattachés statistiquement aux pluies. Traduit au G.H.
- [27] – SVANIDZE G.G. 1967 – River runoff as a stochastic process, and its mathematical modelling – *F. Collins*.
Modèle continu de débits pour une ou plusieurs rivières confluentes.
- [28] – Divers auteurs, notamment américains et soviétiques, 1963 – Modèles de prévision adaptés à différentes conditions géographiques – *Berkeley*.
- [29] – Annuaire hydrologique de la France – *S.H.F.*
- [30] – Stations de jaugeage exploitées par les Circonscriptions Electriques (Annuaire) – *Imprimerie Nationale*. Paris.
- [31] – GIRAULT M. Processus aléatoires – *Dunod*, Paris.
- [32] – HALPHEN E. 1941 – Etude statistique des débits du Rhin à Bâle – *S.H.F.*
- [33] – AITCHISON J. & BROWN J.A.C. – The lognormal distribution – *Cambridge University – press*.
- [34] – HAMMERSLEY J.M. & HANDSCOMB D.C. – 1964 – Monte-Carlo methods – *Spottiswoode Ballantine*, London.
- [35] – LUGIEZ F. & GUILLOT P. – 1968 – La prévision des débits et des crues dans les Services d'Exploitation d'Electricité de France. *10e journées de l'Hydraulique S.H.F.*
Corrélations multiples pour définir la liaison probabiliste d'événements hydrologiques présents et futurs avec les données passées.
- [36] – BENETIN J. 1960 – Variable rainfall and dry period occurrence with regard to irrigation need in the region of southern Slovakia. *Assemblée Générale d'Helsinki, A.I.H.S.*
Définition des besoins en eau d'irrigation à l'échelle mensuelle.

- [37] - VERON R. 1960 - Rapport HYD. 60-13, *ERNUTH, E.D.F.*
- [38] - BERNIER J. **Sur les propriétés des lois "I - Gamma"**
Réf. JB/HC 034, *ERNUTH, E.D.F.*
- [39] - COX D.R. **La théorie du renouvellement** - *Dunod* - Paris.
- [40] - BERNIER J. 1967 - **Sur la théorie du renouvellement et son application en hydrologie.**
Réf. Hyd. 67.10 - *HERNUTH, E.D.F.*
- [41] - BASS J. **Eléments de calcul des probabilités** - *Masson* - Paris.
- [42] - GIRAULT M. 1964 - **Calcul des probabilités en vue des applications** - *Dunod* - Paris.

